Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**
Preprint

# Algoritmo para Permutação e Reversão de Dígitos

Yuri M. Rodella [1]
EMEB Dalila Galli, São Carlos, SP
José Antonio Salvador [2]
DM - UFSCar, São Carlos, SP

**Resumo**. Neste trabalho exploramos uma classe de números que preservam algarismos e, entre eles, aquele que troca os algarismos na ordem inversa do número inicial. Apresentamos uma caracterização especial para a distância de separação entre um número natural dado e ele escrito com os dígitos em ordem inversa e para isso, elaboramos um algoritmo utilizando repunidades, dada a sua natureza intrinsicamente simétrica.

**Palavras-chave**. Algoritmo. Permutadores. Números reversos. Repunidades.

## 1 Introdução

O conceito e a representação dos números evoluiram desde as primeiras civilizações até chegar ao sistema posicional de base 10 com uma notação e propriedades adequada para realização dos cálculos. Neste trabalho apresentamos alguns problemas motivadores, como algumas simetrias e padrões sobre os números naturais visando o uso das repunidades, especialmente para a caracterização da família de permutadores de um número natural e estabelecemos um algoritmo para sua reversão, ou seja, para escrevê-lo em sua ordem inversa. Tais ideias podem ser abordadas nos cursos de Licenciatura em Matemática e no Ensino Básico para investigar e realizar descobertas interessantes sobre os números usando algoritmos, calculadoras e planilhas eletrônicas.

É curiosa a propriedade de representação de alguns números preservando o seu valor quando o lemos da esquerda para a direita ou vice-versa, como os números $1234321, 434, \ldots$, as repunidades $1, 11, 111, 1111, \ldots$ e datas (22/02/2022) escritas sem separar o dia, o mês e o ano como 22022022.

Notemos também que alguns números comutados como 12 e 21, 13 e 31, 122 e 221 possuem seus respectivos quadrados 144 e 441, 169 e 961, 14884 e 48841 elegantemente formados pelos mesmos algarismos também na ordem reversa.

Observemos ainda que 37 é o $12^{\circ}$ número primo, e trocando a ordem de seus algarismos, curiosamente 73 ainda é primo e não obstante, é o $21^{\circ}$ na listagem de primos.

Além de simetrias e padrões muitas outras curiosidades aparecem quando se trata dos números naturais, como as que reconfiguram a disposição numérica dos algarismos dentro dos números, que depende exclusivamente do sistema de numeração posicional adotado.

## 2 Sistema de Numeração, Base e Divisibilidade

No nosso sistema de numeração posicional decimal os números são representados pelos algarismos indo-arábicos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e $9$. O sucessor do número 9, é considerado como uma unidade a mais no sistema, ele está na próxima ordem e escrevemos 10, ou seja, uma vez 1 (uma

[1] yuridi@gmail.com
[2] jasalvador@ufscar.br

 

dezena) mais zero 0 (unidades). Ele é muito especial, pois qualquer número na base 10 é escrito como a combinação de potências de 10 com coeficientes cujos valores vão de 0 a 9.

De fato, escrevemos todo número real $x$ na base 10 como combinações de potências de 10

$$(x)_{10} = \cdots + a_n \times 10^n + \cdots + a_3 \times 10^3 + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} + \ldots$$

com coeficientes $a_i, i \in \mathbb{N}$ (conjunto dos números natuais), podendo assumir valores de 0 a 9.

Do mesmo modo podemos representar um número $x$ em qualquer base $b \geq 2$.

Se $x$ for negativo ele vem precedido do sinal menos.

Estamos interessados na representação de números inteiros, assim escrevemos 2022 na base 10:

$$(2022)_{10} = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

A menor base viável é a binária, com $b = 2$, que é uma das mais interessantes criações divulgada por Liebniz[6].

Na base 10, $(2022)_{10}$ tem quatro algarismos, e na base 2 se faz necessário o uso de 11 algarismos para representar esse mesmo número $(11111100110)_2$. A medida que o número de elementos de uma base de numeração decresce, precisamos mais algarismos para representar um determinado número. Várias propriedades são comuns a todas as bases de representação dos números e elas podem facilitar a realização das operações como as que costumamos fazer na base 10.

Relembremos a unicidade do quociente e do resto numa divisão de números naturais estabelecida pelo agoritimo da divisão de Euclides [6].

Sejam $y$ (dividendo) e $x$ (divisor) dois números naturais com $0 < x < y$. Existem dois únicos números naturais $q$ (quociente) e $r$ (resto) tais que $y = x\,q + r$, com $r < x$.

E também uma propriedade interessante sobre critérios de divisibilidade para qualquer base $b \geq 2$ enunciado na proposição.

**Proposição 2.1.** *Um número natural $m$ escrito em qualquer base $b \geq 2$ é divisível por $b - 1$ se a soma dos seus dígitos é divisível por $b - 1$.*

*Demonstração.* Seja $(m)_b$ um número natural $m$ na base $b$

$$(m)_b = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

Reescrevendo $(m)_b$ como:

$$\begin{aligned}(m)_b &= a_k[(b^k - 1) + 1] + a_{k-1}[(b^{k-1} - 1) + 1] + \cdots + a_1[(b - 1) + 1] + a_0 \\ &= [a_k(b^k - 1) + a_{k-1}(b^{k-1} - 1) + \cdots + a_1(b - 1)] + a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0\end{aligned}$$

e como $b^k - 1$ é múltiplo de $b - 1$ podemos verificar que

$$(m)_b = [\text{um múltiplo de } (b - 1)] + a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

Assim, um número $(m)_b = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0$ é divisível por $b - 1$ se a soma de seus algarismos $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$ é divisível por $b - 1$, qualquer que seja a base $b$. □

Observemos que a divisibilidade de um número por outro independe do sistema de numeração particular em que ele é escrito.

Na base 10 um número é divisível por 9 se a soma dos seus dígitos é divisível por 9.

**Corolário 2.1.** *Num sistema de base $b$ a representação de um número termina em zero se e somente se este número é divisível por $b$.*

De fato, na base 2 todo número terminado em 0 é divisível por 2, da mesma forma que na base 10, todo número terminado em 0 (zero) é divisível por 10.

## 3 Repunidades: Simetrias que geram Simetrias

. Em 1966 Beiler[1] nomeou as repunidades, que são os números formados pela repetição da unidade no sistema decimal. Denotamos por:

$$R_n = \underbrace{111\ldots11}_{\text{n uns}},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Observemos que o produto $12345679 \times 9 = 111111111 = R_9$ é uma repunidade formada por noves uns, operação esta, que era um teste conhecido que se fazía com as calculadoras elementares.

Notemos também que, as primeiras potências das primeiras repunidades como a do 11:

$$11^2 = 11 \times 11 = 121, \quad 11^3 = 11 \times 11 \times 11 = 1331, \quad 11^4 = 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 14641,$$

números que podem ser lidos da esquerda para direita ou vice-versa, enquanto que $11^5 = 161051$ e outras potências de repunidades não.

Um número $m \in \mathbb{N}$ é chamado de capicua ou palíndromo, se a sua representação, $a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0$ em uma determinada base $b \geq 2$ com $a_0 \neq 0$ e $a_k \neq 0$, temos $a_i = a_{k-i}$ para cada $0 \leq i \leq k$, $i, k \in \mathbb{N}$ .

Os números na base decimal 1111, 123454321, 49694, 2002 que obedecem tal propriedade de simetria dos seus algarismos são números capicuas.

As repunidades, além de capicuas, possuem muitas propriedades interessantes como podemos ver em Ochoviet[4], Costa e Carvalho[3] e, entre elas, ressaltamos a representação por

$$R_n = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{\overbrace{999\ldots99}^{\text{n noves}}}{9} = \underbrace{111\ldots11}_{\text{n uns}},\ n \geq 1,$$

ou que, elas podem ser obtidas pela equação discreta linear de primeira ordem não homogênea:

$$R_{n+1} = 10R_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \quad \text{com a condição inicial } R_1 = 1$$

Os quadrados das menores repunidades são números capicuas, que consistem dos algarismos seguidos na ordem (crescente, depois decrescente) $1, 2, 3, \ldots, (n-1), n, (n-1), (n-2), \ldots, 2, 1$. De fato, os produtos especiais de repunidades com elas mesmas, ou os quadrados das repunidades de 1 a 9 são números capicuas.

$$R_1^2 = 1 \times 1 = 1,\ R_2^2 = 11 \times 11 = 121, \ldots, R_9^2 = 111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$$

A partir de um número dado podemos obter um número capicua por concatenação ou pela soma dele com seu reverso.

De fato, escrevendo por exemplo, o número 3426 com os mesmos algarismos na ordem trocada, obtemos o número 6243, e ao concatenarmos com o número original obtemos o número 34266243 que é capicua.

Também podemos partir do número, por exemplo, 38, permutamos ele, invertendo a ordem de seus algarismos, obtemos 83. Somando ambos, o número original com o número com os dígitos invertidos, obtemos $38 + 83 = 121$, e neste caso, logo no primeiro passo, um número capicua.

Caso o número obtido no primeiro passo não for um número capicua, repetimos este mesmo procedimento para tentar encontrar um número capicua. Começando agora com o número 94, permutamos ele e obtemos o número 49, mas $94 + 49 = 143$ não é capicua. Continuamos o processo, comutando 143 obtemos 341 e, aí somando-o com o anterior, obtemos $143 + 341 = 484$, que é capícua. Atentemos que este procedimento nem sempre nos leva a um número capicua, como podemos experimentar partindo de alguns números, como de 196 ou de 897.

 

# 4 Permutador de um Número Natural

Ao considerarmos o número 3456 e adicionarmos 2979, obtemos um resultado especial, 6435, na qual figuram todos os algarismos do número inicialmente apresentado, na ordem trocada, um caso particular de todas as permutações dele. O mesmo vale para os números 1980 e 3087 que somados com 3456 obtemos outros números com os mesmos algarismos: $3456 + 1980 = 5436$ e $3456 + 3087 = 6543$. Desta forma, dizemos que os números $2979, 1980$ e 3087 pertencem à família de permutadores associados ao número 3456. Uma característica necessária, (mas não suficiente), para que um número seja um permutador de outro número, é que este seja múltiplo de 9 [5].

**$L_1$: Permutadores e os respectivos permutados de 3456**

| Número | + | Permutador | = | Permutado |
|---|---|---|---|---|
| 3456 | + | 0 | = | **3456** |
| 3456 | + | 9 | = | 3465 |
| 3456 | + | 90 | = | 3546 |
| 3456 | + | 108 | = | 3564 |
| 3456 | + | 189 | = | 3645 |
| 3456 | + | 198 | = | 3654 |
| 3456 | + | 900 | = | 4356 |
| 3456 | + | 909 | = | 4365 |
| 3456 | + | 1080 | = | 4536 |
| 3456 | + | 1107 | = | 4563 |
| 3456 | + | 1179 | = | 4635 |
| 3456 | + | 1197 | = | 4653 |
| 3456 | + | 1890 | = | 5346 |
| 3456 | + | 1908 | = | 5364 |
| 3456 | + | 1980 | = | 5436 |
| 3456 | + | 2007 | = | 5463 |
| 3456 | + | 2178 | = | 5634 |
| 3456 | + | 2187 | = | 5643 |
| 3456 | + | 2889 | = | 6345 |
| 3456 | + | 2898 | = | 6354 |
| **3456** | + | **2979** | = | **6435** |
| 3456 | + | 2997 | = | 6453 |
| 3456 | + | 3078 | = | 6534 |
| 3456 | + | 3087 | = | **6543** |

**$L_2$: Permutadores e os respectivos permutados de 1234**

| Número | + | Permutador | = | Permutado |
|---|---|---|---|---|
| 1234 | + | 0 | = | **1234** |
| 1234 | + | 9 | = | 1243 |
| 1234 | + | 90 | = | 1324 |
| 1234 | + | 108 | = | 1342 |
| 1234 | + | 189 | = | 1423 |
| 1234 | + | 198 | = | 1432 |
| 1234 | + | 900 | = | 2134 |
| 1234 | + | 909 | = | 2143 |
| 1234 | + | 1080 | = | 2314 |
| 1234 | + | 1107 | = | 2341 |
| 1234 | + | 1179 | = | 2413 |
| 1234 | + | 1197 | = | 2431 |
| 1234 | + | 1890 | = | 3142 |
| 1234 | + | 1908 | = | 3142 |
| 1234 | + | 1980 | = | 3244 |
| 1234 | + | 2007 | = | 3241 |
| 1234 | + | 2178 | = | 3412 |
| 1234 | + | 2187 | = | 3421 |
| 1234 | + | 2889 | = | 4123 |
| 1234 | + | 2898 | = | 4132 |
| **1234** | + | **2979** | = | **4213** |
| 1234 | + | 2997 | = | 4321 |
| 1234 | + | 3078 | = | 4312 |
| 1234 | + | 3087 | = | **4321** |

Considerando o número 1002 temos que o seu comutado 2001, é o número lido da direita para a esquerda, ou seja, com os algarismos do número inicial trocados de ordem. Notamos que ele pode ser obtido ao somarmos 999 ao número original. De fato, $1002 + 999 = 2001$. O número 999 é o permutador especial de 1002 pois gera o reverso dele. Este permutador é chamado de reversor.

O reversor de um número $m = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1, \in \mathbb{N}$ é outro número natural $Rev(m)$ tal que

$$m + Rev(m) = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$$

Observemos que no caso do número 3518, $Rev(3518) = 4635$, pois $3518 + Rev(3518) = 3518 + 4635 = 8153$, que aparentemente não se assemelha ao 999 do exemplo anterior. Veremos que por mais diferentes que sejam, todos os permutadores apresentam um mesmo padrão de construção.

Com um número natural de $m$ algarismos distintos podemos obter $m!$ números distintos com os mesmos algarismos de $m$, que chamaremos de permutadores, e apenas um deles, é exatamente o seu reverso.

Vamos apresentar uma caracterização para todos os números não triviais pertencentes a esta família de permutadores bem como a sua efetiva construção. As listas $L_1$ e $L_2$ a seguir com todos os possíveis permutadores de 3456 e 1234 podem ser conferidas com uma planilha, por exemplo, do software livre Geogebra[3] ou do LibreOffice Calc.

Detalhemos agora que 3456 adicionado a 2979 nos dá 6435, o que modifica a ordem original dos algarismos. Todavia, observamos que o número 2979 pode ser decomposto em $1980 + 999$ em

[3] www.geogebra.org

 

que a primeira parcela permuta os algarismos 3 e 5, resultando no permutado 5436, e a segunda parcela comuta, sobre este último resultado, os algarismos 5 e 6 chegando finalmente a 6435.

Observamos nas listas anteriores que os permutadores associados ao 3456 são os mesmos permutadores associados ao 1234, ou ainda poderíamos verificar também que são os mesmos de 6789.

Estes números carregam uma simetria inerente a esta operação de adição, e é de se esperar que sua construção usa uma determinada família de números que sejam simétricos por excelência. De fato, dado um número natural qualquer existe uma família de permutadores associada a ele, e números diferentes podem ser associados a famílias de permutadores completamente diferentes. Mas também depende de como os algarismos estão distribuidos dentro deste número inicial dado.

Dizemos que os números $2979, 1980$ e $3087$ pertencem à família de permutadores associados aos números 3456, 1234 e 6789. Entretanto, destacamos que os números reversores que funcionam para estes números com algarismos consecutivos ordenados, não são os mesmos usados para números com algarismos mais espaçados como 2468, 1369, 6174 ou 8263.

A relação entre uma série crescente de permutadores como as mostradas nas próximas listas $L_3$ e $L_4$, obviamente funciona para quaisquer números com dígitos sequenciais.

$L_3$: **Permutadores e os respectivos permutados**

| Número | + | Permutador | = | Permutado |
|---|---|---|---|---|
| 12 | + | 09 | = | **21** |
| 123 | + | 108 | = | **231** |
| 1234 | + | 1107 | = | **2341** |
| 12345 | + | 11106 | = | **23451** |

$L_4$: **Permutadores e os respectivos permutados**

| Número | + | Permutador | = | Permutado |
|---|---|---|---|---|
| 89 | + | 09 | = | **98** |
| 789 | + | 108 | = | **897** |
| 6789 | + | 1107 | = | **7896** |
| 56789 | + | 11106 | = | **67895** |

# 5 Construção do Reversor de um Número Natural

Mostraremos uma caracterização para os números pertencentes a esta família de reversores, mas antes da construção da reversão de um número faremos algumas considerações:

**a)** Tomemos o conjunto $R = \{1, 11, 111, \ldots, R_n, \ldots\}$ em que $R_n$ é o número formado pelas justaposições do algarismo 1 por $n$ vezes seguidas, nomeado conjunto das repunidades. E para levar em conta os efeitos de simetria que desejamos o ampliaremos, incluindo também o número zero que, para efeitos de notação será considerado $R_0$.

**b)** A diferença entre dois números constituídos pelos mesmos algarismos (sem importar a ordem) sempre será um múltiplo de 9, uma vez que ambos pertencem necessariamente a um mesmo conjunto de restos pela divisão por 9, de forma que a diferença destes sempre deixa resto zero na divisão por nove, uma conhecida e clássica prova dos nove [5].

**c)** Uma constatação é que a construção de reversão dos algarismos de um número natural $m$ que faremos é realizada com um número de passos finito, uma vez que o reversor terá tantas parcelas quanto os pares de algarismos figurarem no número inicial $m$.

**d)** Em cada iteração da construção a ordem da repunidade associada a parcela diminui em dois algarismos. Isso significa que $m$ sendo par, na última parcela irá figurar $R_1$ multiplicando a diferença dos dois algarismos centrais. Para $m$ impar, a última parcela da repunidade será de ordem $R_0$, que é zero pela definição, mas que multiplicaria a diferença do algarismo central pelo seu simétrico em relação a ele, ou seja, ele próprio, o que também torna nula esta última parcela.

**Teorema 5.1.** *Seja $m$ um número natural na base 10 formado por $n$ dígitos, descrito pelo conjunto de algarismos $(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1)_{10}$ em que $0 \leq a_k \leq 9,\ k = 1, 2, \ldots 9$ . Temos então que o número:*

$$9 \times \left[\ (a_1 - a_n) \times\ R_{n-1} + (a_2 - a_{n-1}) \times R_{n-3} \times 10^1 + (a_3 - a_{n-2}) \times R_{n-5} \times 10^2 + \ldots\right.$$

*em que $R_n$ é a repunidade de ordem $n$ é um reversor de $m$ .*

 

*Demonstração.* Vamos considerar a primeira parte da adição, e mostrar que ela altera apenas os algarismos extremos de $m$ dado, mantendo fixo todos os demais algarismos dele. O primeiro estágio da formação do reversor consiste em tomar a diferença entre os algarismos extremos de $m$, multiplicar pela repunidade $R_{n-1}$ de ordem $n-1$ e ainda multiplicar este resultado por 9.

Assim, a soma do número inicial com o primeiro estágio do reversor relativo a este número será:

$$m + (a_1 - a_n) \times R_{n-1} \times 9$$

Escrevendo $9 = 10 - 1$ e usando a propriedade distributiva dos números naturais temos:

$$\begin{aligned} m + (a_1 - a_n) \times R_{n-1} \times (10-1) &= m + 10 \times (a_1 - a_n) \times R_{n-1} - (a_1 - a_n) \times R_{n-1} \\ &= m + 10 \times (a_1 - a_n) \times R_{n-1} + (a_n - a_1) \times R_{n-1} \end{aligned}$$

Notamos que a primeira parcela a ser adicionada com $m$ é um número de $n$ algarismos formado pela repetição do dígito $(a_1 - a_n)$ por $n-1$ vezes e com dígito final igual a zero, por ser múltiplo de 10. A segunda parcela é formada por apenas $n-1$ algarismos[4] formado pelo dígito $(a_n - a_1)$ conforme podemos expressar claramente na tabela 1.

Tabela 1: Tabela auxiliar para permutação dos extremos do número

| $a_n$ | $a_{n-1}$ | ... | $a_2$ | $a_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(a_1 - a_n)$ | $(a_1 - a_n)$ | ... | $(a_1 - a_n)$ | 0 | $+$ |
| | $(a_n - a_1)$ | ... | $(a_n - a_1)$ | $(a_n - a_1)$ | |
| $\mathbf{a_1}$ | $\mathbf{a_{n-1}}$ | ... | $\mathbf{a_2}$ | $\mathbf{a_n}$ | |

Desenvolvemos este resultado pelo algoritmo da adição, algarismo a algarismo das colunas das três primeiras linhas da Tabela 1. Isso provém de um simples artifício para se operacionalizar a multiplicação por 9. Desta forma, a cada novo estágio a ser adicionado, cada par de algarismos simétricos é trocado de ordem e preserva os algarismos presentes dentro do intervalo entre estes simétricos, de sorte que, ao final do processo resultará o $Rev(m)$. Visto que cada um destes estágios de permutação de algarismos são independentes entre si, eles podem ser sobrepostos de forma a gerar qualquer combinação final de algarismos, não necessariamente só na ordem inversa.

Os próximos estágios de composição do permutador trocará de posição o próximo conjunto de algarismos simétricos, sem alterar a posição dos demais, numa sucessão de passos finitos, até que o número inicial tenha trocado todos os seus dígitos de posição. A soma de todos os estágios é que nos dá o reversor associado ao número dado inicialmente. □

Observemos quando o número $m$ é maior do que o seu reverso, a parcela negativa é absorvida pela diferença dos algarismos extremos ao se inverter a ordem de subtração. Efetuando-se a adição, os algarismos intermediários são preservados e os algarismos extremos são comutados em relação às suas posições iniciais. Este último fato é o que nos força a usar o termo reversor no lugar de distância entre números simétricos, uma vez que esta nomenclatura não estaria bem caracterizada com as propriedades de uma função distância, embora a desigualdade triangular se verifica.

Observemos nas listas $L_1$ e $L_2$ que os permutadores associados ao 3456 ou 1234 são os mesmos

[4]Se $(a_1 - a_n) > 0$, então $(a_n - a_1) < 0$ tratando-se aqui de “número" formado pela repetição de dígitos com sinal, o que não constitui verdadeiramente um número

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0233  

do número 6789. Construímos agora, de acordo com o algoritmo do teorema 6.1 o $Rev(17524)$:

$$\begin{aligned} Rev(17524) &= 9 \times [(a_1 - a_5)R_4 + (a_2 - a_4) \times R_2 \times 10 + (a_3 - a_3) \times R_0 \times 10^2] \\ &= 9 \times [(4-1) \times R_4 + (2-7) \times R_2 \times 10 + (5-5) \times R_0 \times 10^2] \\ &= 9 \times [3 \times 1111 - 5 \times 11 \times 10] \\ &= 9 \times [3333 - 550] \\ &= 25047 \qquad (\text{ De fato: } \mathbf{17524} + Rev(17524) = 17524 + 25047 = \mathbf{42571}) \end{aligned}$$

Para um número qualquer, existe uma família de permutadores associada a este número.

Dado $m \in \mathbb{N}$ escrito em qualquer base $b$, a subtração de qualquer permutação dos seus algarismos sempre será divisível por $b - 1$.

Observamos que a fatoração prima do $(462)_7$ que é $3 \times 5 \times (22)_7$ corresponde a $(240)_{10} = 3 \times 5 \times (16)_{10}$ e, de fato, 22 na base 7 corresponde exatamente ao número 16 na base 10.

# 6 CONCLUSÃO

Atividades investigativas como o reconhecimento das propriedades das operações aritméticas, a realização de cálculos aritméticos, identificação de simetrias, padrões e generalizações possibilitam o uso das ferramentas tecnológicas como instrumentos importantes de aprendizagem, no início do desenvolvimento do pensamento computacional, e com a linguagem algorítmica, reconhecendo a estrutura lógica operacional própria dos algoritmos no Ensino Básico adotadas como eixos integradores de conteúdos podem levar a construção dos reversores, casos particulares de permutadores de um número e podem ser transpostos para a resolução de problemas modelados pela linguagem matemática, contemplando as competências e habilidades pregadas pela BNCC (Base Nacional Comum Curricular)[2].

Tal como o número zero foi incluído mais tarde no sistema de numeração, precisamos introduzí-lo como $R_0 = \{0\}$, mesmo não sendo repunidade, para que as demonstrações usadas para obtenção do reversor fizessem sentido.

Outra conclusão importante se faz em relação aos números formados por um único algarismo, é que estes podem estar associados a diversos reversores ao se admitir zeros a sua esquerda. A exemplo, o número 4, pode ser entendido como sendo 04 e 004, relacionando-se assim aos reversores 36, 396 respectivamente quando necessário.

A construção do reversor de um número é perfeitamente generalizável para as outras bases!

# Referências


[1] A. H. Beiler. **Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertain**. 2a. ed. New York: Dover, 1966. ISBN: 9788529402024.

[2] BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

[3] E. A. Costa e F. S. Carvalho. "Como escrever 11111...111 como produto de dois números". Em: **RPM** 87 (1996).

[4] T. C. Ochoviet. "Números capicuas e sistema de numeração". Em: **RPM** 29 (1995).

[5] F. W. Rodrigues. "A Prova dos noves. Como e por que funciona (ao menos quase sempre)". Em: **RPM** 14 (1989).

[6] University of St Andrews. Online. Acessado em 20/03/2022, `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid/`.


 