

# Ensino de Funções Trigonométricas com Modelagem Matemática

Adriana T. E. Oliveira<sup>1</sup>  
SEDUC/MT, Nova Mutum, MT  
Geraldo L. Diniz<sup>2</sup>  
DMAT/ICET/UFMT, Cuiabá, MT

**Resumo.** Para este trabalho foi realizado um levantamento histórico das dissertações produzidas no Mestrado Profissional em Matemática – Profmat, do ano de 2013 a 2018, que trataram do tema trigonometria. Deste processo de levantamento bibliográfico, foram encontradas 134 dissertações, classificadas em dois subtemas: abordagem conceitual e abordagem por aplicações. Este levantamento serviu de suporte teórico para analisar os resultados alcançados no ensino de trigonometria em sala de aula, utilizando as diversas ferramentas metodológicas. Neste contexto, o objetivo foi abordar o ensino de trigonometria, através da modelagem matemática, com a finalidade de enriquecer e fomentar o campo de investigação, sistematização de ideias e conceitos. Além de promover o papel do professor num ensino mais dinâmico e abrangente, aplicar a Matemática em aspectos que possibilite o aluno pensar situações reais, contextualizar as complexidades e ser capaz de perceber-se, enquanto constrói o seu próprio conhecimento. Apresenta uma proposta de ensino que, através de um experimento, analisa pequenas amplitudes do movimento de um pêndulo simples, numa situação real, em que se faz a contextualização de uma situação-problema para o ensino de conteúdos matemáticos, especificamente trigonométricos.

**Palavras-chave.** Abordagem Conceitual, Aprendizagem Matemática, Ensino Dinâmico.

## 1 Introdução

Embora seja possível observar a matemática presente em diferentes situações que envolvam a atividade humana. Entretanto, nas escolas o seu ensino é um dos principais problemas. Quando se trata de pensar matematicamente, as dificuldades em diversas questões desde as mais básicas que envolvem noções elementares, como o cálculo de raízes, razão e proporção, ou até mesmo a porcentagem de um número, são obstáculos que permeiam o espaço escolar.

Quanto ao ensino da trigonometria, o problema é um tanto curioso, ao passo que o conceito e suas aplicações, muitas vezes sequer trabalhados, acabam sendo tratados de forma fragmentada, com cálculos mecanicamente repetitivos e sem significado.

A motivação para a abordagem deste tema se deve ao fato de ser um conteúdo que, trabalhado em sala, muitas vezes gera desconforto para os alunos. Estes apresentam dificuldades na assimilação dos conceitos e na visualização das situações problemas apresentadas, além de questionarem a sua utilidade. Assim como o prazo para o cumprimento do currículo que, quase sempre, impossibilita viabilizar uma proposta investigativa interdisciplinar.

Sendo assim, é questionável se este conhecimento, utilizado para a solução de diversos problemas e estudado desde a antiguidade, será necessário nos dias atuais? Terá o professor competências

---

<sup>1</sup>adri\_egea27@hotmail.com

<sup>2</sup>geraldo.diniz@ufmt.br

para ensinar trigonometria em uma perspectiva diferenciada, contextualizada e crítica? Em que a modelagem matemática pode contribuir para o ensino da trigonometria? Por que estudar trigonometria, qual a sua utilidade?

Estas indagações é que levaram a esta proposta de trabalho, cuja abordagem possibilitou o desenvolvimento deste trabalho, que propõe uma reflexão sobre o ensino de trigonometria e a modelagem matemática, cujo o objetivo é estabelecer relações para uma compreensão sistemática com significado prático e de caráter investigativo.

A abordagem pela modelagem matemática teve como base a literatura, especificamente [2, 3, 5, 6, 10] na perspectiva de fundamentar metodologias de ensino, com uma proposta diferenciada. Também são expostas ideias da Etnomatemática em diálogo com a modelagem matemática [4, 7–9], da qual se pontua aspectos culturais e sociais que contribuem para o currículo dentro do contexto escolar.

## 2 Modelagem matemática no contexto de sala de aula

A proposta pedagógica deve se desprender da prática tradicional de ensino, por essa razão, Alves [1] afirma que novas metodologias devem ser trazidas para a sala de aula evidenciando as que aproximem os conteúdos matemáticos de suas aplicabilidades e, conseqüentemente, dos alunos.

Buscando acrescentar ao saber do aluno, práticas que definem conceitos matemáticos abstratos, que justificam seu uso na solução de problemas. A relevância dada na questão, é aplicar e fazer o uso da Matemática, num ensino dinâmico para, em seguida, conceituar a Matemática em si e usá-la para avaliar como ferramenta. O que se quer com a modelagem é ensinar Matemática de uma forma que os estudantes atuem ativamente neste ensino e criem mecanismos de reflexão e de ação [10].

Todas as técnicas e apropriação do conhecimento transmitidos ao logo dos anos, mostram a capacidade de criar e de inovar, além de modificar o espaço, as relações e aplicações destes conhecimentos na percepção da realidade. Com esta gama de conhecimento, Biembengut [4] retrata que tais observações fazem da Matemática uma consequência destas necessidades, criadas, modificadas e incorporadas por um grupo, que entende e utiliza de métodos próprios, capazes de explicar conceitos matemáticos. É o que D'Ambrosio [8] denomina de Etnomatemática, a arte ou técnica de explicar, conhecer e entender como uma pessoa ou grupo gera conhecimento matemático, faz uso em seus afazeres, organiza e transmite este conhecimento a outrem.

Um modelo pedagógico proposto por Ferreira [9] que enfatiza o resgate da Matemática que existe nas diferentes formas de expressão cultural e que estão presentes no cotidiano do aluno, é traduzido pelo esquema da figura 1(a), em que se pode observar os caminhos semelhantes ao processo de modelagem matemática em sala de aula.

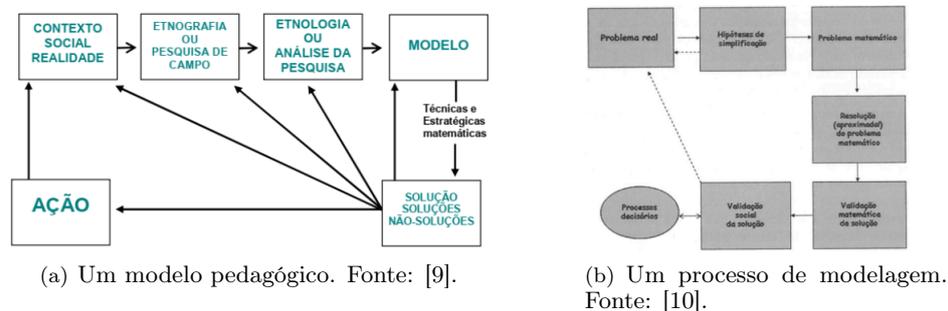


Figura 1: Esquemas para sala de aula.

Desta forma, trabalhar com a modelagem matemática afim de solucionar problemas e aprofundar conhecimentos partindo da curiosidade e investigação do aluno, como exemplificado pelo esquema da figura 1(b), em que se tem um processo de modelagem [10].

### 3 Proposta para abordagem da trigonometria

Aqui se propõe um trabalho pedagógico com aplicação da modelagem matemática para alunos do ensino médio. Buscando provocar um cenário dinâmico para a aplicação de uma sequência didática, dando oportunidade de realização de um trabalho que, de forma interdisciplinar, promova discussões e contemple ideias acerca da organização das etapas de ensino. Diante disso, a assimilação de conceitos científicos formados através de processos que instigam pesquisa, reflexão e busca por soluções, são melhor absorvidos [11].

Para isso, se deve adotar a organização das etapas da modelagem matemática para a sequência didática, definida conforme o objetivo do professor. A etapa inicial se dá com a escolha do tema e a definição dos conteúdos matemáticos inseridos no estudo de tais conteúdos, que devem ser estabelecidos e escolhidos de forma prévia, levando em conta que novos conteúdos possam surgir no decorrer do próprio processo.

Considerando o tema, oscilações do pêndulo simples, os conteúdos de Matemática a serem estudados previstos nas etapas são: medida de comprimento, medida de tempo, razão e proporção, as relações trigonométricas na circunferência trigonométrica, função cosseno, periodicidade das funções trigonométricas.

Para a atividade, o professor poderá definir duplas, apresentar o objetivo do experimento e estabelecer o tempo da aula prática, com a finalidade de agilizar e envolver os alunos na organização. Para dar início à atividade (etapa 1), uma vez escolhido o tema, é necessário definir uma questão problematizadora, a qual irá conduzir a experimentação, bem como a busca por informações.

Daí, se realiza a atividade com o experimento prático e a coleta de dados. O professor neste processo direciona, orienta e acompanha a atividade feita pelos alunos. Com a obtenção dos dados, a intenção é construir uma tabela numa planilha eletrônica para facilitar a leitura e análise de forma mais eficiente. Esta planilha também será utilizada para a construção de gráficos, dos quais os alunos farão a análise. As planilhas permitem aos alunos se concentrarem nas manipulações, no raciocínio e na “programação” ao invés dos cálculos rotineiros, que podem ser entediantes para muitos dos estudantes [12].

#### 3.1 Planejamento das atividade

A sequência didática aqui proposta parte do princípio que os alunos já tenham familiaridade com conceitos trigonométricos. Se propõe uma atividade experimental, expressa na tabela 1 de forma resumida, tendo como objetivo dar significado ao estudo de trigonometria e suas aplicações.

Tabela 1: Dados do experimento para a planilha eletrônica.

$t$	$P_t$	$\varphi(t)$
0	$P_0$	$\varphi(0)$
1	$P_1$	$\varphi(1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$P_n$	$\varphi(n)$

### 3.2 Primeiro momento – aula conceitual

Na primeira aula, como questão problematizadora do tema, oscilações do pêndulo simples, tem-se uma possível questão: em tempos antigos, os relógios de pêndulo eram utilizados como padrão à uma constante, chamada tempo. Considerando que é possível utilizar diferentes medidas de comprimento  $L$  para o fio que sustente o pêndulo, apresentado conforme a figura 2(a), qual o comportamento do pêndulo em relação ao tempo e sua posição de largada, quando observados durante um intervalo de tempo? Quais serão as frequências, ao soltar um pêndulo comprido e um pêndulo curto, em um mesmo intervalo de tempo? Como é possível medir o tempo corretamente?

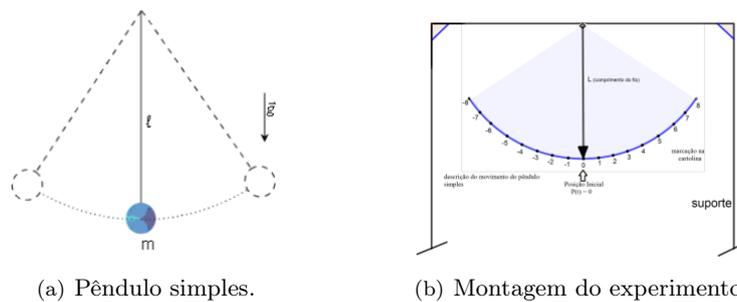


Figura 2: Pêndulo para o experimento.

Ao término da aula, o professor irá verificar as curiosidades, sugerir pesquisas sobre o tema e discutir com os alunos a situação-problema, gerando a questão problema que será o ponto de partida para a busca de soluções. Nesta aula, o professor poderá solicitar que os alunos se organizem e tragam os materiais necessários para a realização do experimento, com antecedência, levando em consideração que não será oneroso para os alunos, caso a escola não disponha de tal material para a montagem do experimento conforme a figura 2(b).

### 3.3 Segundo momento – montando o experimento

Para a atividade prática serão necessários os seguintes materiais: Pêndulo do tipo prumo, que poderá ser montado, com fio de nylon ou barbante e um objeto de massa considerável; cartolina; pincel marcador; celular ou câmera filmadora; computador ou notebook com planilha eletrônica; suporte em formato de U retangular, com base, a ser transportado para qualquer lugar. Confeccionar o mesmo com ripas de madeiras presas por parafusos ou barras de ferro soldadas em suas extremidades, conforme a figura 2(b). Este instrumento pode ser confeccionado antes da aula prática pelos próprios alunos. Solicitar aos alunos que se organizem em duplas (ou trios) e distribuir entre eles os materiais que serão utilizados na aula prática. Cada grupo definirá a função de cada um e fará um trabalho coletivo, ajudando-os mutuamente, sempre em diálogo e constante socialização das dúvidas. O professor atuará neste momento com a orientação e acompanhamento da atividade. O experimento será montado em sala de aula, com a finalidade de que haja menor influência possível de fatores externos. Cada grupo terá um suporte com base fixa, em formato de U. A montagem do pêndulo será feita por cada uma das duplas, de forma que as medidas do comprimento do fio não precisam ser as mesmas. A base de sustentação do pêndulo ficará posicionada próxima à parede, em que estará colada a cartolina para as marcações do movimento do pêndulo, com o desenho da trajetória que o pêndulo já fixado fará, em formato de setor circular, com auxílio do pincel marcador, conforme apresentado na figura 2(a).

### 3.4 Terceiro momento – coleta de dados

Montado o sistema do pêndulo simples para o experimento, os alunos deverão definir um espaço ideal para fazer a filmagem do experimento. Um deles se posiciona em local estratégico para a filmagem, enquanto o outro irá soltar a massa do pêndulo, que poderá ser solto à direita, na posição positiva, com abertura aleatória, dentro do limite da marcação feita. Então, se inicia a filmagem. Os alunos terão o cuidado de registrar, organizar e definir o tempo de observação do experimento, lembrando que o professor deverá orientar que é importante observar um intervalo maior de tempo para a coleta de informações, o suficiente para analisar o experimento (cerca de 30 a 60 segundos). Cada grupo poderá coletar a quantidade de tempo que considera ideal, podendo ou não utilizar todas as medições, uma vez que eles poderão selecionar os dados que irão utilizar para a análise, através da escolha de alguns dos quadros da filmagem.

### 3.5 Quarto momento – tratamento dos dados

Esta aula poderá ser realizada no laboratório de informática, após o experimento prático, que será o momento de anotar os dados da filmagem. Para facilitar a atividade, os alunos registrarão as informações coletadas em uma planilha eletrônica (ou no GeoGebra). Para isso, terão que baixar o vídeo no computador e assistí-lo para que observem a posição do pêndulo em função do tempo (em segundos). Na tabela será feito o registro da posição que o pêndulo se encontra, negativa ou positiva, conforme a posição obtida no experimento para cada segundo. É possível organizar as colunas 1 e 2, conforme exemplo dado na tabela 1 (ver seção 3.1 – pag.3). Em seguida, os alunos farão a análise dos dados obtidos, construindo o gráfico com auxílio da planilha eletrônica, do tipo gráfico de dispersão, com a finalidade de observar o tempo que o pêndulo leva para descrever um ciclo completo. Além disso, no decorrer do intervalo observado, a oscilação máxima das alternâncias em torno da posição estacionária, representada no eixo vertical, mostra a amplitude do movimento.

### 3.6 Quinto momento – atividades interativas

Após o tratamento dos dados, o professor explica aos alunos que o período de oscilação, ocorre a cada  $2\pi$  e é necessário encontrar a amplitude do movimento e o valor de  $\omega$  definido na equação 1, dada em radianos e que descreva esta função periódica do movimento. O valor de  $\omega'$ , denominado frequência angular, representa a taxa de variação de uma grandeza angular em radianos por segundo,

$$\omega = 2\pi f \quad (1)$$

sendo  $f$  a razão entre o número de ciclos e o tempo necessário para realizá-los. A amplitude  $A$  (no eixo vertical) será o deslocamento máximo do pêndulo a partir da posição de equilíbrio.

O professor apresenta o conceito da função cosseno, faz uma análise do gráfico com situações-problema, e pede para os alunos compararem com as informações reais obtidas no experimento. Os alunos deverão obter matematicamente, uma função que represente o movimento do pêndulo em função do tempo, conforme a equação 2

$$\varphi(t) = A \cdot \cos(\omega t) \quad (2)$$

cujos valores de  $A$  e  $\omega$  devem ser obtidos do experimento. Daí, os alunos preenchem a terceira coluna da tabela 1 (pag.3) com os valores para a função  $\varphi(t)$  obtida. Em seguida, farão as comparações do valor real do experimento com o valor analítico do modelo obtido, aproximando ao máximo com os dados reais. Esta comparação gráfica, pode ser feita com as colunas 2 e 3, da tabela 1 (ver seção 3.1 – pag.3), utilizando o recurso da planilha eletrônica para desenhar o gráfico de dispersão, ajustando o valor de  $\omega$  no modelo analítico para uma melhor aproximação possível. Este é o momento da

construção dos conhecimentos matemáticos sobre trigonometria. Sendo possível, que os alunos façam a relação entre teoria e prática vivenciada em sala de aula. Desta forma, se dá oportunidade que os alunos gerenciem a sua atividade, testando valores e calculando-os, para encontrar o valor de  $\omega$  adequado ao experimento. A manipulação destes dois parâmetros ( $A$  e  $\omega$ ), tendo em vista que não se está considerando o amortecimento do pêndulo, dará credibilidade ao aluno, que estará produzindo e re-significando sua aprendizagem.

### 3.7 Sexto momento – atividade avaliativa

Será solicitado aos grupos que façam os registros da realização da atividade, através da construção de um portfólio contendo as observações, desde como se deu a organização e socialização da atividade no grupo e o que tal atividade contribuiu para sua aprendizagem. Todo registro como figuras, anotações, conclusões, o desafio da atividade, execução, enquanto produziam os modelos que representavam o experimento, podem fazer parte do portfólio do grupo. A avaliação se dará numa perspectiva de observar pontos positivos e negativos da atividade, a participação e comprometimento do grupo, por meio de entrevista e diálogo com os alunos, a fim de que os mesmos exponham suas opiniões. Será observado individualmente cada aluno para o diagnóstico da aprendizagem, bem como possibilitar melhorias nos encaminhamentos metodológicos. O professor poderá organizar um momento da aula para socializar os modelos matemáticos dos grupos e sua validade. Para um detalhamento maior da proposta consulte [11].

### 3.8 Algumas observações sobre a proposta

O que diferencia a sequência didática aqui apresentada dos demais trabalhos já observados em outras dissertações, é que este utiliza um experimento prático construído pelos alunos, de forma que a coleta de dados e a manipulação destes é feita passo a passo, construindo percepções para se obter o conceito de função trigonométrica. Permite ao aluno visualizar e compreender a construção do modelo matemático que identifica o movimento harmônico simples do pêndulo, com o comportamento dado por uma oscilação periódica. Não se traz uma fórmula pronta, mas possibilita que o aluno a construa, com significados a partir de sua prática

Esta sequência didática é realizada num espaço dinâmico do qual o aluno pode utilizar o celular como uma ferramenta de aprendizagem. Não se trata de uma atividade estagnada com propostas restritas, e sim da aplicação de um fenômeno, cujos dados promovem a formulação de hipóteses, a organização e visualização deste comportamento graficamente e posterior a essas observações a definição de funções trigonométricas. Além do aluno poder realizar um experimento que o possibilite descobrir como as tecnologias e planilhas eletrônicas podem otimizar a compilação de dados. O ensino de funções trigonométricas contextualizado traz a proposta para a compreensão do modelo matemático obtido a fim de explicar o fenômeno, não apenas com a realização de cálculos mecanicamente. Dá oportunidade para a análise e consistência lógica da situação-problema, a formalização e troca de ideias e reflexões, a construção de conhecimentos matemáticos.

## 4 Considerações finais

Muitas respostas para muitas perguntas é o que se busca enquanto professor. Entre elas, aquelas que certamente se materializam no contexto sociocultural, pela vivência do aluno. Então, dialogar com as possibilidades e propor o olhar, o sentido e a percepção da mudança é um dos instrumentos que deve ser potencializado nas salas de aula. É preciso aprofundar em ações, que integrem o conhecimento na sua pluralidade.

Ao questionar o conhecimento que a Matemática, em específico a trigonometria, promove em sala de aula, é possível notar que a solução de diversos problemas está entrelaçada a uma série de requisitos básicos. Está na visualização de situações nas suas diversas formas de ser, no entendimento e uso da Matemática pelo homem em um contexto histórico. Na literatura encontrada o foco está na ideia de uma busca constante por metodologias que inovem o espaço de ensino. Para isso, é preciso que o espaço escolar seja dinâmico, que estimule no aluno a curiosidade, a pesquisa e a defesa de suas ideias. Que assuma o papel de protagonista na construção dos conceitos e saberes, crie estratégias para intervir na sua realidade sabendo sua importância no processo.

Este espaço não apenas transmite conhecimento, [8] afirma que a contextualização se dá em caráter avaliativo, de capacidades e habilidades cognitivas reconhecendo fatos históricos que são construídos ao longo do tempo, que leva a uma posição como parte desta evolução, caracteriza cada indivíduo e suas organizações intelectuais.

## Agradecimentos

A autora agradece à Capes pela bolsa de mestrado recebida no período abr/2017 a abr/2018.

## Referências

- [1] G. A. Alves. “Modelagem matemática no ensino da trigonometria”. Dissertação de mestrado. UFMA, 2017.
- [2] R. C. Bassanezi. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 1a. ed. São Paulo: Contexto, 2002. ISBN: 85-7244-207-3.
- [3] M. S. Biembengut. “30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais”. Em: **Alexandria – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia** 2.2 (2009), pp. 7–32.
- [4] M. S. Biembengut. “Modelagem matemática & resolução de problemas, projetos e etnomatemática: Pontos confluentes”. Em: **Alexandria – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia** 7.2 (2014), pp. 197–219.
- [5] D. Burak. “Modelagem matemática: experiências vividas”. Em: **Analecta** 6.2 (2005), pp. 33–48.
- [6] A. D. Caldeira. “Modelagem matemática: um outro olhar”. Em: **Alexandria – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia** 2.2 (2009), pp. 33–54.
- [7] U. D’Ambosio. **Educação matemática: da teoria a prática**. 13a. ed. Campinas: Papyrus, 2006. ISBN: 85-308-0410-4.
- [8] U. D’Ambosio. **Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer**. 4a. ed. São Paulo: Ática, 1998. ISBN: 978-85-080-3757-5.
- [9] E. S. Ferreira. “A importância do conhecimento etnomatemático indígena na escola dos não-índios”. Em: **Em Aberto** 14.62 (1994), pp. 89–95.
- [10] J. F. C. A. Meyer, A. D. Caldeira e A. P. S. Malheiros. **Modelagem em Educação Matemática**. 1a. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. ISBN: 978-85-513-0645-1.
- [11] A. T. E. Oliveira. “Ensino de funções trigonométricas com modelagem matemática”. Dissertação de mestrado. UFMT, 2019.
- [12] P. V. A. Saldanha. “Uma análise do uso de planilhas eletrônicas como estratégia no ensino de função afim”. Dissertação de mestrado. UFVVSF, 2016.