Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um modelo de otimização inteira para o Problema da Régua de Golomb de ordem 2

Luiz Leduino de Salles-Neto[1]
ICT-Unifesp, São José dos Campos, SP.
Carlile Lavor[2]
IMECC/Unicamp, Campinas, SP.

Resumo. Uma Régua de Golomb com n pontos é um conjunto de n inteiros maiores ou iguais a zero tal que o conjunto das diferenças entre os pontos não possui dois elementos iguais. Uma Régua de Golomb ótima é aquela em que seu maior ponto L não pode ser diminuído. Uma Régua de Golomb de ordem 2 é uma Régua de Golomb tal que o conjunto das diferenças das distâncias entre os pontos tem cardinalidade mínima. Neste artigo, apresentamos um primeiro modelo de otimização inteira para obter uma Régua de Golomb de ordem 2, segundo o conhecimento dos autores. Resultados computacionais para problemas de pequeno porte são apresentados.

Palavras-chave. Régua de Golomb, Geometria de Distâncias, Otimização.

1 Introdução

Dado um inteiro positivo n, o Problema da Régua de Golomb, em inglês *Golomb Ruler Problem* (GRP), é localizar n marcas inteiras ao longo de uma régua imaginária tal que todas as distâncias entre pares de marcas são distintas e o comprimento da régua é mínimo.

Dizemos que temos uma Régua de Golomb, *Golomb Ruler* (GR), quando, dadas n marcas, as distâncias associadas são todas diferentes. Temos uma Régua de Golomb Ótima, *Optimal Golomb Ruler* (OGR), quando temos uma Régua de Golomb de comprimmento mínimo.

Por exemplo, o OGR para $n = 4$ é $\{0, 1, 4, 6\}$, e para $n = 5$, existem duas soluções: $\{0, 1, 4, 9, 11\}$ e $\{0, 2, 7, 8, 11\}$.

Uma Régua Golomb de Ordem 2 é uma Régua de Golomb tal que todas as diferenças $\delta_{ijkl} = |d_{kl} - d_{ij}|$, $\{i, j\} \neq \{k, l\}$ são distintas tanto quanto possível. Chamaremos estas diferenças de distâncias de ordem 2. A construção da régua de Golomb de ordem ótima 2, ou seja, de réguas de comprimento mínimo, é um problema altamente combinatório que tem aplicações, por exemplo, na construção de códigos autoconvolucionais duplamente ortogonais (CSO^2C) [2].

Uma Régua Golomb de Ordem 2 contém algumas repetições inevitáveis de algumas distâncias de ordem 2 δ_{ijkl}. Por exemplo, dado um (i, j, k, l) de 4 uple, $1 \leq i \leq j \leq k \leq l$, temos:
$\delta_{ijkl} = d_l - d_k - d_j + d_i = d_l - d_j - (d_k - d_i) = \delta_{lkji}$.

Jaumard *et al.* [2] demonstraram que o número mínimo de diferentes distâncias de ordem 2 (Dif) em uma O2GR é dado por:

$$Dif = Nd - \sum_{t=1}^{n-2} (n-t)(n-t-2) - \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!}$$

[1] luiz.leduino@gmail.com
[2] clavor@unicamp.br

onde n é o número de pontos e Nd é o número total de distâncias. Por exemplo, se $n = 5$, $Nd = 45$ e, pela expressão acima, $Dif = 29$. Ou seja, existe um total de 45 distâncias de ordem 2, tal que 29 são diferentes entre si. O problema é: onde estão estas marcas?

A tabela 1 detalha a contagem do número de repetições inevitáveis para $M = 2, ..., 10$.

Tabela 1: Número de repetições inevitáveis

n	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	t=7	t=8	Nd	Dif
3	-	-	-	-	-	-	-	3	3
4	3+1	-	-	-	-	-	-	15	11
5	3+5	4	-	-	-	-	-	45	29
6	3+15	4	5	-	-	-	-	105	64
7	3+35	4	5	6	-	-	-	210	125
8	3+70	4	5	6	7	-	-	378	223
9	3+126	4	5	6	7	8	-	630	371
10	3+210	4	5	6	7	8	9	990	584

O número de repetições inevitáveis evidencia a dificuldade adicional de resolver o Problema da Régua de Golomb de Ordem 2 quando comparado ao Problema da Régua de Golomb (de ordem 1). Vale observar que as soluções ótimas para o Problema da Régua de Golomb são conhecidas apenas até $n = 27$ [1].

Jaumard *et al.* [2] propuseram um algoritmo exato para construir uma Régua de Golomb de ordem 2 ótima e forneceu as soluções ótimas até 9 pontos (marcas).

Segundo o nosso conhecimento, não existe um modelo na literatura para o O2GRP. Na seção 2 um modelo de otimização inteira é apresentado para o Problema da Régua de Golomb de ordem 2. Na seção 3 são mostrados os resultados computacionais. Finalmente na seção 4 apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

2 Um modelo de otimização para o Problema da Régua de Golomb de ordem 2

Apresentamos a seguir um modelo de otimização inteira não-linear para o GRP proposto por [3], considerando um limitante superior L_u para o problema:

$$\begin{array}{lc}
\min\limits_{t\geq 0,\ x_i\in\{0,1\}} & t \\
 & ix_i \leq t,\ i = 1, ..., L_u, \\
 & \sum\limits_{i=1}^{L_u} x_i = n - 1, \\
\text{s.a} & \\
 & x_j + \sum\limits_{i=1}^{L_u - j} (x_i x_{i+j}) \leq 1,\ j = 1...L_u - 1, \\
 & x_i \in \{0, 1\},\ i = 1...L_u.
\end{array} \tag{1}$$

Como estamos minimizando t, as desigualdades

$$ix_i \leq t,$$

para $i = 1, ..., L_u$, "forçam" o comprimento da régua ser mínimo. Ao mesmo tempo, a equação

$$\sum_{i=1}^{L_u} x_i = n - 1$$

requer que $n-1$ variáveiss x_i sejam iguais a 1, e as desigualdades

$$x_j + \sum_{i=1}^{L_u - j} (x_i x_{i+j}) \leq 1,$$

para $j = 1, ..., L_u - 1$, garantem que todas as distâncias entre pares de marcas são diferentes.

A solução $(x_1, ..., x_{L_u})$ do modelo (1) providencia um solução do GRP dada por (ix_i), para $i = 1, ..., L_u$, cujo comprimento mínimo é o valor ótimo t.

Para construir o modelo para o Problema da Régua de Golomb de Ordem 2 usamos algumas variáveis e restrições do modelo acima, já que precisamos que a solução seja, também, uma Régua de Golomb.

Seja n o número de marcas e L_u um limitante superior para o comprimento da régua dado como entrada. Considere as seguintes variáveis:

- $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, .., L_U$, determina se existe uma marca em i, i.e., $x_i = 1$ se a régua ótima tem uma marca em i, e $x_i = 0$ caso contrário.
- $r \geq 0$ é o tamanho ótimo da Régua.
- $d_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, .., L_U$, determina se existe uma distância igual a i, i.e., $d_i = 1$ se existe $0 \leq k, l \leq L_u$ tal que $x_k = x_l = 1$ and $k - l = i$; $d_i = 0$ caso contrário.
- b_{ij}, $i = 1, .., L_U - 1$, $j = i + 1, .., L_U$ representa a diferença das distâncias j e i. Portanto, $b_{ij} = |j - i|$, se $d_j = d_i = 1$, e $b_{ij} = 0$, se $d_j = 0$ ou $d_i = 0$.
- c_k, $k = 1, .., L$, é o número de distâncias b_{ij} iguais a k.
- q_k, $k = 1, .., L$, é igual a 1 se e somente se $c > 0$ e é igual a zero quando $c = 0$.

  Assim, temos o seguinte modelo de otimização para o Problema da Régua de Golomb de ordem 2, que chamamos de Modelo 1:

$$\begin{array}{lcc}
\min & & t \\
& ix_i \leq t & i = 1, ..., L_u \\
& x_j + \sum\limits_{i=1}^{L_u - j} (x_i x_{i+j}) \leq 1, & j = 1, ..., L_u - 1 \\
& b_{ij} = j d_j d_i - i d_i d_j & i = 1...L_u - 1, j = i + 1...L_u, \\
& c[k] = \sum_{i=1}^{L-k} b_{i,i+k}/k & k = 1...L_u \\
& q_k <= c_k & k = 1...L_u \\
& q_k >= Dif * c_k & k = 1...L_u \\
& \sum_{i=}^{L} c_i = Dif & \\
& \sum_{i=}^{L} d_i = Dist & \\
& \sum_{i=}^{L} x_i = n - 1 & \\
& x_i \in \{0, 1\} & i = 1...L_u, \\
& q_i \in \{0, 1\} & i = 1...L_u, \\
& d_i \in \{0, 1\} & i = 1...L_u, \\
& c_i \in \mathbb{Z} & i = 1, ..., L_u \\
& b_{i,j} \in \mathbb{Z} & i = 1...L_u - 1,\ j = i + 1...L_u, \\
& r \in \mathbb{Z} & .
\end{array} \quad (2)$$

A primeira restrição, em conjunto com a função-objetivo, determina um problema min_max, ou seja, minimizar o maior valor marcado na régua - comprimento. A segunda restrição garante que os pontos satisfazem a condição da régua de golomb (ver [1]). A terceira restrição realiza o cálculo das distâncias de ordem 2. A quarta, quinta e sexta restrições asseguram a contagem do número de diferentes distâncias de ordem 2. A sétima restrição assegura a cardinalidade mínima destas diferentes distâncias e a oitava restrição assegura o número total de distâncias de ordem 2, conforme exposto na seção anterior. Por fim, a última restrição assegura o número de marcas, colocando uma marca no ponto zero.

Como já mencionamos, segundo o nosso conhecimento, este modelo de otimização é o primeiro proposto para o Problema da Régua de Golomb de Ordem 2 na literatura. Acreditamos que algumas técnicas de contagem presentes neste modelo podem ser utilizadas também em outras situações/problemas.

É importante observar que as não-linearidades podem ser também linearizadas adicionando-se novas vraiáveis. De fato, para cada i e k considere a variável binária y_{ik} e as seguintes desigualdades:

$$x_i + x_k - y_{ik} \leq 1,$$

$$y_{ik} \leq x_i,$$

$$y_{ik} \leq x_k,$$

Estas três desigualdades linearizam o termo não-linear $x_i x_k$, para todo para i, k no sentido de termos um modelo equivalente e sem termos não-lineares. De fato, $x_i x_k = 1$ se e somente se $y_{ik} = 1$; e $x_i x_k = 0$ se e somente se $y_{ik} = 0$.

3 Resultados Computacionais

Os testes computacionais foram realizados em um Dell Laptop qith 16 GB RAM e intel celeron 1.6 GHs. Para resolver o modelo foi usado o software "baron 19.7.13"no ambiente AMPL. A tabela 1 mostra o tempo computacional, em segundos, requerido para encontrar o valor ótimo de cada instância.

Tabela 2: Tempo Computacional em segundo e valores ótimo

n	Valor ótimo	Modelo 1
4	12	0.78
5	33	4791.1
6	79	87912.1

O problema é realmente muito complexo. Jaumard et al. [2] observam que, para $n = 9$, obter e provar a otimalidade foi necessário o uso de 95 estações de trabalho (45 1 GHz, 50 500 MHz), o que equivale, aproximadamente, 3,63 anos em uma única máquina.

4 Conclusões

O artigo apresenta um primeiro modelo de otimização para o Problema da Régua de Golomb de Ordem 2. Contudo, o modelo é bem complexo e difícil de resolver, tendo em vista ser um modelo não-linear inteiro. A abordagem presente na literatura, e citada na primeira seção, também tem dificuldade de obter a solução ótima mesmo para pequenos exemplos. Uma possível melhoria seria a relaxação das variáveis inteiras, como foi utilizado em [1], para obter soluções ótimas da Régua de Golomb de Ordem 2 por meio de um modelo de otimização contínua.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradacer à Fapesp [processos 2021/03269-7, 2016/01860-1] e ao CNPq [processos 405702/2021-3, 304528/2021-8] pelo suporte financeiro.

Referências

[1] Duxbury, Phil; Lavor, Carlile; Salles-Neto, Luiz Leduino. A conjecture on a continuous optimization model for the Golomb Ruler Problem. *RAIRO - Operations Research*, 2021.

[2] Jaumard, B., Solari, Y., and Galinier, P. On the design of optimum order 2 Golomb ruler. *Groupe d'études et de recherche en analyse des décisions, HEC Montréal*, 2003.

[3] B. Kocuk and W.-J. van Hoeve, A Computational comparison of optimization methods for the Golomb Ruler Problem, Lecture Notes in Computer Science, 11494:409-425, 2019.

