

Estratégias para redução de cenários aplicada ao problema de planejamento da operação hidrotérmica com aversão ao risco

Gislaine Aparecida Pericaro¹

UNESPAR, Campo Mourão, PR

Karla Cristiane Arsie²

PUCPR, Curitiba, PR

Elizabeth Wegner Karas³

UFPR, Curitiba, PR

Resumo. Neste trabalho propomos duas estratégias de redução de cenários que podem ser aplicadas ao problema de planejamento da operação hidrotérmica do sistema brasileiro de geração de energia elétrica. Este é um problema de decisão sequencial estocástica, cuja solução deve ser não-antecipativa, no sentido de que a decisão em um estágio deve ser tomada sem o conhecimento do futuro. As estratégias propostas estão baseadas no conceito de cenários irrelevantes. A identificação de tais cenários, possibilita a eliminação destes no conjunto original de cenários usados para tratar a estocasticidade do problema, reduzindo assim sua dimensão. A resolução do problema não-antecipativo com a medida de risco $CVaR$ considerando esse conjunto reduzido fornece resultados tão confiáveis quanto aqueles obtidos a partir do conjunto original. Experimentos numéricos são apresentados a fim de ilustrar a aplicação das técnicas propostas considerando um conjunto de dados reais.

Palavras-chave. Análise de cenários não-antecipativos, Cenários irrelevantes, Otimização não-linear, Sistemas hidrotérmicos.

1 Introdução

Neste trabalho abordamos o problema de planejamento da operação hidrotérmica associado ao Sistema Interligado Nacional. Trata-se de um problema de programação estocástica multiestágios, de grande porte, que inclui restrições não-lineares, conforme descrito em [8]. O objetivo é obter decisões operativas para geração de energia tanto pelas usinas hidroelétricas quanto pelas termoeletricas de modo a minimizar o custo da operação, satisfazendo as restrições de balanço hídrico, de atendimento à demanda e os limites operativos das usinas. A estocasticidade do problema é consequência das incertezas associadas às afuências dos reservatórios, as quais podem ser descritas por modelos estocásticos a partir de dados históricos disponíveis para um certo período.

Geralmente este problema é modelado como um programa estocástico linear multiestágios por meio de simplificações na função de produção das usinas hidroelétricas, a qual originalmente é uma função não-linear devido à altura de queda das usinas, sendo considerada nas restrições de atendimento à demanda. Frequentemente este problema é resolvido por Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) [7] ou ainda por métodos de decomposição como *Progressive Hedging* [12].

Em nossa abordagem, discutida com maiores detalhes em [3], consideramos um modelo em que as usinas hidroelétricas são individualizadas, as funções de produção são não-lineares e as incertezas são

¹gpericaro@gmail.com

²karla.arsie@grupomarista.org.br

³ewkaras@ufpr.br

tratadas por meio da análise de cenários [9], em que as afluências são representadas por um conjunto de cenários independentes e equiprováveis gerados pelo modelo CARMA [4, 5]. Nosso interesse é obter soluções não-antecipativas, no sentido de que uma decisão em um estágio não pode usar o conhecimento do futuro, uma vez que este ainda não está disponível. Para tanto, propomos uma abordagem não-antecipativa baseada em [8], com a inclusão de uma medida de aversão ao risco. Dessa forma, a decisão tomada em um estágio deve minimizar a medida de risco *CVaR* (*Conditional Value at Risk*) definida em [1, 11]. Isso dá origem a um problema de programação não-linear de grande porte, cuja dimensão pode ser reduzida por meio de alguma técnica de redução de cenários. Assim, propomos duas estratégias para simplificar a minimização do *CVaR* usando o conceito de cenários irrelevantes discutido em [2, 10].

O trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 discorremos brevemente sobre as medidas de risco *VaR* (*Conditional Value at Risk*) e *CVaR* e apresentamos a formulação do problema de interesse. Na Seção 3 descrevemos as estratégias propostas para redução de cenários. A fim de mostrar a aplicação destas, apresentamos na Seção 4 as principais características do problema de planejamento da operação hidrotérmica considerado, bem como os resultados obtidos para a redução dos cenários. Finalmente, na Seção 5 estão as considerações finais.

2 Problema de interesse

Considere um cenário $A = [A_1, A_2, \dots, A_T]$ definido como uma sequência de T vetores aleatórios $A_t \in \mathbb{R}^R$ e a variável de decisão $x = [x_1, x_2, \dots, x_T]$, em que $x_t \in \mathbb{R}^n$ para todo $t \in \{1, \dots, T\}$. Para um dado cenário A , podemos escrever o seguinte problema determinístico

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \Gamma(A), \end{aligned} \tag{1}$$

em que $f : \mathbb{R}^{nT} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $\Gamma \subset \mathbb{R}^{nT}$ representa o conjunto viável associado ao cenário A . Uma solução desse problema é denotada por $\bar{x}(A)$, composta pela sequência de decisões $\bar{x}_t, t = 1, \dots, T$, a qual define uma política associada ao cenário A .

Conforme mencionado anteriormente, o problema de interesse nesse trabalho é de natureza estocástica. As incertezas são tratadas por meio de análise de cenários e a decisão para um estágio deve ser não-antecipativa, isto é, deve ser tomada sem um conhecimento determinístico do futuro. Ademais, assumimos que a decisão tomada deve ser avessa ao risco. Dessa forma, a fim de discutir a formulação do problema não-antecipativo com aversão ao risco, vamos apresentar inicialmente uma definição da medida de risco *CVaR*.

Considere um conjunto de L eventos independentes equiprováveis e uma variável aleatória discreta que associa um custo escalar a cada evento. Indexando os eventos por $i = 1, 2, \dots, L$, a variável aleatória pode ser representada pelo vetor $Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_L]$. Vamos supor que

$$Z_1 \leq Z_2 \leq \dots \leq Z_L. \tag{2}$$

Assim, Z_L representa o pior caso e para um dado $p \in \{1, \dots, L\}$, o p -ésimo pior custo é dado por Z_{L-p+1} . A porcentagem de eventos mais baratos é dada por

$$\alpha = \frac{L-p}{L} \tag{3}$$

e, conseqüentemente, $p = (1 - \alpha)L$, sendo α um múltiplo de $1/L$. A partir dessa notação, podemos definir as medidas de risco *VaR* e *CVaR*, apresentadas em detalhes em [1], por

$$VaR_\alpha(Z) = Z_{L-p+1} \quad \text{e} \quad cvar_\alpha(Z) = \frac{1}{p} \sum_{i=L-p+1}^L Z_i. \tag{4}$$

Note que com essas definições, temos que VaR é o p -ésimo pior evento e $CVaR$ é a média dos p eventos mais caros, ou seja, é a média dos eventos maiores que VaR .

Para apresentar a definição de $CVaR$, assumimos que a ordem dos custos (2) é conhecida. Porém, em geral, isso não acontece na prática. Para tais casos, podemos obter $CVaR$ fazendo uso do teorema a seguir, cuja demonstração para o caso geral, que inclui o caso contínuo, é apresentada em [1]. Para nosso caso particular, em que as variáveis aleatórias são discretas, a demonstração pode ser encontrada em [3].

Teorema 2.1. *Considere um conjunto de L eventos equiprováveis e a variável aleatória que assume os valores $[Z_1, Z_2, \dots, Z_L]$. Então, para $p \in \{2, \dots, L - 1\}$ temos*

$$CVaR_\alpha(Z) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^L [Z_i - \lambda]^+ \right\}, \quad (5)$$

em que $[a]^+ = \max\{0, a\}$.

2.1 O problema não-antecipativo com aversão ao risco

Considere um conjunto de L cenários independentes $\mathcal{A} = [A^1, A^2, \dots, A^L]$ e assumamos que os L cenários coincidam no primeiro estágio, ou seja, $A_1^i = \bar{A}_1 \in \mathbb{R}^R$, para todo $i = 1, \dots, L$. O problema não-antecipativo consiste em minimizar o custo médio dos piores cenários, de modo que a decisão do primeiro estágio seja a mesma para todos os cenários. Matematicamente, o problema não-antecipativo com aversão ao risco, para um dado $p \in \{1, 2, \dots, L - 1\}$ e $\alpha = (L - p)/L$, é dado por

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && CVaR_\alpha(Z(x)) \\ &\text{sujeito a} && x^i \in \Gamma(A^i), \quad i = 1, \dots, L, \\ &&& x_1^i = x_1^j, \quad i, j = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (6)$$

em que $Z(x) = [Z_1(x^1), Z_2(x^2), \dots, Z_L(x^L)]$ é o vetor aleatório de custos associados aos L cenários e $Z_i(x^i) = f(x^i)$ é o custo da política associada ao cenário A^i . Note que esse problema é L vezes maior que o problema determinístico (1).

Usando o Teorema 2.1, o problema (6) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \lambda + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^L [Z_i(x^i) - \lambda]^+ \\ &\text{sujeito a} && x^i \in \Gamma(A^i), \quad i = 1, \dots, L, \\ &&& x_1^i = x_1^j, \quad i, j = 1, \dots, L \\ &&& \lambda \geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

com as variáveis de decisão $x^i \in \mathbb{R}^{n^T}$, para $i = 1, \dots, L$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Agora, como $[Z_i(x^i) - \lambda]^+ = \max\{0, Z_i(x^i) - \lambda\}$, e introduzindo as variáveis g_i , com $i = 1, \dots, L$, este último problema pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \lambda + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^L g_i \\ &\text{sujeito a} && x^i \in \Gamma(A^i), \quad i = 1, \dots, L, \\ &&& x_1^i = x_1^j, \quad i, j = 1, \dots, L \\ &&& g_i - Z_i(x^i) + \lambda \geq 0, \quad i = 1, \dots, L \\ &&& g_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, L. \end{aligned} \quad (8)$$

Na aplicação considerada nesse trabalho, (8) é um problema de programação não-linear de grande porte que pode ter centenas de milhares de variáveis. A grande dificuldade na resolução deste problema está nas

restrições $x_1^i = x_1^j$, chamadas restrições de acoplamento. Sem estas restrições o problema consiste essencialmente no cálculo de uma nuvem de cenários-solução, isto é, na resolução de L problemas determinísticos, com decisões distintas para o primeiro mês.

A fim reduzir a dimensão desse problema, propomos uma técnica de redução de cenários usando o conceito de cenários irrelevantes de [2, 10], conforme apresentado na seção a seguir.

3 Cenários irrelevantes

Para definir o conceito de cenários irrelevantes adotado nesse trabalho, assuma que

- (i) O problema (6) com a nuvem de cenários $\mathcal{A} = \{A^1, \dots, A^L\}$ foi resolvido gerando uma nuvem de soluções $[x^1, \dots, x^L]$ com custos $[Z_1, \dots, Z_L]$ e $x_1^i = x_1^j$, para todo $i, j \in \{1, \dots, L\}$. Defina $\hat{x}_1 = x_1^1$.
- (ii) $VaR_\alpha(Z)$ é o p -ésimo pior caso de Z .
- (iii) Dado um cenário $\bar{A} \notin \mathcal{A}$, o problema determinístico

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && x \in \Gamma(\bar{A}), \\ & && x_1 = \hat{x}_1, \end{aligned} \tag{9}$$

é resolvido. Considere que o problema tem solução \bar{x} e denote seu custo ótimo por $\bar{Z} = f(\bar{x})$. Se $\bar{Z} \leq VaR_\alpha(Z)$, então dizemos que o cenário \bar{A} é irrelevante para o problema (6).

Se um cenário \bar{A} é irrelevante para o problema (6), então esse pode ser incluído no problema \mathcal{A} sem modificar o resultado. De fato, a solução \bar{x} satisfaz as restrições de (6) e fornece um custo menor do que os outros p cenários mais caros.

A partir desse conceito, percebemos que se for possível identificar um cenário como irrelevante antes de resolver o problema (6), podemos eliminá-lo do conjunto de cenários, reduzindo assim a dimensão do problema. Para tanto, propomos o seguinte algoritmo.

Algoritmo 3.1. *Identificando cenários irrelevantes*

Data: Nuvem de cenários \mathcal{A} com índices $I = \{1, \dots, L\}$, $p < L$.

Escolha $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ com índices $I' \subset I$ com $L' > p$ elementos.

Defina $\alpha' = \frac{L' - p}{L'}$ e $\bar{I} = \emptyset$

Resolva (6), usando a nuvem \mathcal{A}' com α' e L' cenários de índices I' . Os resultados são $\bar{x}_1 = x_1^i$, para $i \in I'$, com custos $Z_{I'}$ e o valor $VaR_{\alpha'}(Z_{I'})$.

Verifique se os cenários no conjunto $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ são irrelevantes como segue:

Para todo $j \in I \setminus I'$

 resolva o problema (9) com $\bar{A} = A^j$, e obtenha $Z_j = \bar{Z}$.

 Se $Z_j \leq VaR_{\alpha'}(Z_{I'})$,

 então A^j é irrelevante.

 Senão

 defina $\bar{I} = \bar{I} \cup \{j\}$.

Se $\bar{I} = \emptyset$, então

 todos os cenários de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ são irrelevantes,

Senão

 reinicie o algoritmo com $I' = I' \cup \bar{I}$.

Ressaltamos que se os cenários de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ são irrelevantes, os resultados do problema (6) com estes cenários será o mesmo: os p cenários mais caros, a solução x_1^i e os valores de VaR e $CVaR$ são idênticos (a menos de possíveis empates entre os custos dos cenários mais caros). Além disso, segue de (3) e da definição de α' , que

$$(1 - \alpha')L' = (1 - \alpha)L.$$

Nossa proposta inclui ainda duas sugestões de procedimentos para escolher a nuvem $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ de candidatos a cenários relevantes:

- Ordenar a nuvem de soluções determinísticas: como há uma grande variação no custo observado na nuvem de soluções determinísticas, um erro na decisão do primeiro estágio (caso as restrições de acoplamento sejam ignoradas) não tem um efeito significativo nos custos dos ótimos determinísticos. Por exemplo, para $L = 100$ e $p = 10$, os 10 piores cenários na solução de (6) muito provavelmente estarão entre os 30 piores cenários da nuvem determinística. Logo, a estratégia é calcular os L custos determinísticos e escolher o conjunto de índices I' dos L' piores cenários para construir a nuvem \mathcal{A}' .
- Resolver uma versão simplificada do problema (6) considerando, por exemplo, uma linearização das restrições envolvidas e então escolher os L' piores cenários.

A seguir apresentamos uma discussão sobre a aplicação prática dessas estratégias em um problema real de planejamento da operação hidrotérmica.

4 Aplicação

Nosso foco nessa seção é ilustrar uma aplicação proposta de redução de cenários tomando como exemplo uma formulação do problema (6) para o caso do planejamento da operação hidrotérmica do Sistema Interligado Nacional. Detalhes sobre a modelagem matemática desse problema podem ser encontrados em [8]. Para tanto, consideramos os dados reais de um sistema composto por 141 usinas hidroelétricas e 105 termoeletricas distribuídas em 5 subsistemas interligados.

Conforme descrito em [8], a função objetivo do problema determinístico (1) representa o custo total de operação dado pela soma dos custos de geração térmica, déficit de energia e custos associados ao intercâmbio de energia entre os subsistemas. Por outro lado, o problema não-antecipativo com aversão ao risco (6) minimiza o custo esperado associado aos piores cenários de afluências. A partir do volume inicial dos reservatórios $V_0 \in \mathbb{R}^R$ e um cenário de afluência $A^i \in \mathbb{R}^R \times \mathbb{R}^T$ com T estágios, o conjunto viável Γ é dado por

$$\Gamma(A^i) = \Gamma(V_0, A^i) = \{x \in \mathbb{R}^{nT} \mid \ell \leq x \leq u, h(x, V_0, A^i) = 0 \text{ e } g(x) = 0\}, \quad (10)$$

em que $\ell, u \in \mathbb{R}^{nT}$ representam os limites operacionais para as variáveis de decisão; $h : \mathbb{R}^{nT} \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma função linear que representa a restrição de balanço hídrico; e $g : \mathbb{R}^{nT} \rightarrow \mathbb{R}^m$ corresponde à restrição de atendimento à demanda. A função linear h depende do volume inicial V_0 e do cenário de afluência A . Já a função g envolve a geração em cada usina hidroelétrica e é não-linear devido à altura de queda das usinas. Consideramos cenários sintéticos de afluências fornecidos pelos autores de [4]. Tais cenários foram gerados por um modelo CARMA[5] a partir das afluências naturais mensais das usinas hidroelétricas, disponíveis para 88 anos, desde 1931 até 2019.

Uma característica importante do problema se refere ao fato de que as restrições não-lineares possuem derivadas de segunda ordem esparsas e fáceis de serem calculadas, possibilitando o cálculo exato das aproximações de segunda ordem para as Lagrangeanas. Assim, o problema pode ser resolvido de forma eficiente pelo algoritmo de filtro com programação quadrática sequencial que minimiza, a cada iteração, aproximações quadráticas da Lagrangeana usando as hessianas exatas em regiões de confiança. Para maiores detalhes sobre esse algoritmo, veja [6].

Para os testes numéricos consideramos um horizonte de $T = 12$ meses a fim de dar destaque à influência das decisões do primeiro estágio. Além disso, consideramos uma nuvem \mathcal{A} de $L = 100$ cenários sintéticos de afluições e fixamos $p = 10$. Tomamos subconjuntos $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ com $L' = 20$ cenários escolhidos a partir das duas estratégias discutidas anteriormente:

- **Estratégia 1:** Ordenação da nuvem de soluções determinísticas;
- **Estratégia 2:** Resolução do problema (6) com restrições de atendimento à demanda (g) linearizadas em (10).

Na Figura 1 mostramos os custos de planejamento associados aos $L = 100$ cenários. A linha contínua corresponde aos custos dos cenários usados para escolher os candidatos a cenários relevantes \mathcal{A}' . A diferença entre os gráficos da esquerda e da direita está na forma como os custos foram obtidos. Na Figura 1a, a linha contínua representa os custos ordenados obtidos para o problema determinístico (1) resolvido para cada cenário da nuvem \mathcal{A} . Por outro lado, na Figura 1b, a linha contínua representa os custos ordenados obtidos resolvendo a versão linearizada do problema (6). Em ambos os casos, os $L' = 20$ cenários mais caros foram selecionados para o conjunto \mathcal{A}' de cenários candidatos a relevantes. Os valores de VaR e $CVaR$ e a decisão \bar{x}_1 foram obtidas resolvendo o problema (6) com os cenários de \mathcal{A}' . Finalmente, a linha pontilhada representa os custos obtidos para os problemas determinísticos (9) para cada cenário de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ com a inclusão das restrições correspondentes à fixação da decisão do primeiro mês \bar{x}_1 . Como era de se esperar, os custos desse problema com mais restrições é maior, conforme ilustrado na Figura 1a. As duas figuras mostram que os cenários em $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ são irrelevantes para ambas as estratégias, uma vez que seus custos são menores que o valor de VaR . Uma discussão sobre as políticas operativas obtidas a partir da abordagem não antecipativa com a medida de risco $CVaR$ usando os cenários obtidos dessa forma é apresentada em [3].

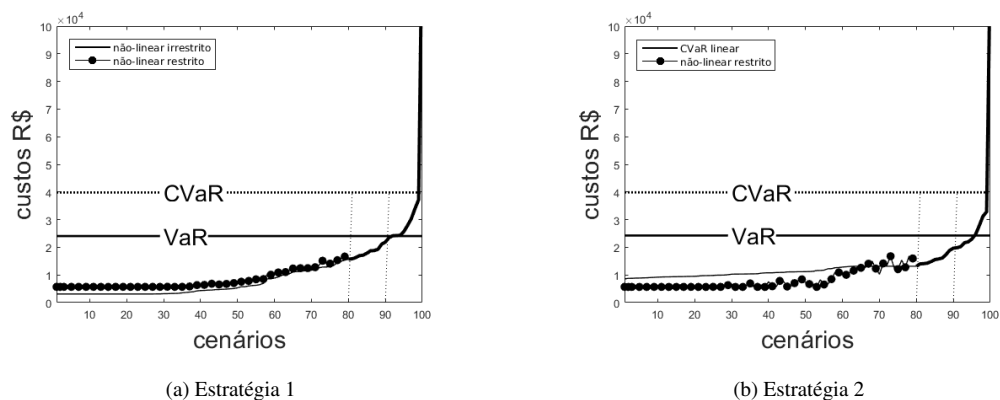


Figura 1: Custos totais associados aos cenários

5 Considerações finais

Nesse artigo abordamos o problema de planejamento de operação hidrotérmica a partir de um modelo matemático que considera as usinas hidroelétricas individualmente e um modelo não-linear para representar as funções de produção dessas usinas. As soluções não-antecipativas podem ser obtidas a partir da análise de cenários com inclusão da medida de risco $CVaR$, cuja definição foi apresentada para o caso em que as variáveis aleatórias são discretas e os eventos são equiprováveis. Como objetivo principal do trabalho, duas estratégias para reduzir o tamanho do problema foram propostas. A fim de validá-las, experimentos

numéricos foram realizados para um sistema composto por usinas 141 hidroelétricas e 105 termoelétricas distribuídas em 5 subsistemas interligados. Tais experimentos mostraram a eficácia das abordagens propostas para reduzir o número de cenários e consequentemente a dimensão do problema não-antecipativo.

Agradecimentos

Este trabalho foi desenvolvido pelo Grupo Lynx dentro do projeto P&D PD-6491-0307/2013 proposto pela Copel Geração e Transmissão SA, com o apoio do Programa P&D da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL).

Referências

- [1] A. Shapiro, D. Dentcheva e A. Ruszczyński. **Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory**. 2nd. Philadelphia: SIAM, 2014. doi: 10.1137/1.9781611973433.
- [2] S. Arpón, T. Homem-de-Mello e B. Pagnoncelli. “Scenario reduction for risk-averse stochastic programs with Conditional Value-at-Risk”. Em: **Mathematical Programming** 170.1 (2018), pp. 327–356. doi: 10.1007/s10107-018-1298-9.
- [3] K.C. Arsie et al. **Non-anticipative risk-averse analysis with effective scenarios applied to long-term hydrothermal scheduling**. Rel. técn. Disponível em: www.optimization-online.org/DB_HTML/2022/03/8846.html. 2021.
- [4] D.H. Detzel et al. “Cenários sintéticos de vazões para grandes sistemas hídricos através de modelos contemporâneos e amostragem”. Em: **Revista Brasileira de Recursos Hídricos** 19.1 (2014), pp. 17–28. doi: 10.21168/rbrh.v19n1.p17-28.
- [5] F. Camacho, A.I. McLeod e K.W. Hipel. “Contemporaneous bivariate time series”. Em: **Biometrika** 74.1 (1987), pp. 103–113. doi: 10.1093/biomet/74.1.103.
- [6] G.A. Perigo, A.A. Ribeiro e E.W. Karas. “Global convergence of a general filter algorithm based on an efficiency condition of the step”. Em: **Appl. Math. Comput.** 219 (2013), pp. 9581–9597. doi: 10.1016/j.amc.2013.03.012.
- [7] M.V.F. Pereira e L.M.V.G. Pinto. “Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning”. Em: **Mathematical Programming** 52 (1991), pp. 359–375. doi: 10.1007/BF01582895.
- [8] G.A. Perigo et al. “Optimal non-anticipative scenarios for nonlinear hydro-thermal power systems”. Em: **Applied Mathematics and Computation** 387.15 (2020), pp. 1–12. doi: 10.1016/j.amc.2019.124820.
- [9] R.T. Rockafellar e R.J-B. Wets. “Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty”. Em: **Math. Oper. Res.** 16 (1991), pp. 119–147. doi: 10.1287/moor.16.1.119.
- [10] H. Rahimian, G. Bayraksan e T. Homem-de-Mello. “Identifying effective scenarios in distributionally robust stochastic programs with total variation distance.” Em: **Math. Program.** 173 (2019), pp. 393–430. doi: 10.1007/s10107-017-1224-6.
- [11] R.T. Rockafellar e S. Uryasev. “Conditional value-at-risk for general loss distributions”. Em: **Journal of Banking & Finance** 26.7 (2002), pp. 1443–1471. doi: 10.1016/S0378-4266(02)00271-6.
- [12] R.J-B. Wets. “The aggregation principle in scenario analysis and stochastic optimization”. Em: **Algorithms and Model Formulations in Mathematical Programming**. Ed. por S. W. Wallace. Vol. 51. NATO ASI Series F: Computer and Systems Sciences. Springer, 1989, pp. 91–113. doi: 10.1007/978-3-642-83724-1.