

# Potencial Complexo em Fluxo Uniforme com Inomogeneidades Cilíndricas

João Paulo Martins dos Santos<sup>1</sup>

Academia da Força Aérea - AFA

Hélio Correia Jhúnior<sup>2</sup>

Universidade de São Paulo - USP

Alessandro Firmiano de Jesus<sup>3</sup>

Academia da Força Aérea - AFA

Edson Wendland<sup>4</sup>

Universidade de São Paulo - USP

## Resumo.

O efeito da interação de um conjunto de inomogeneidades cilíndricas no potencial complexo foi analisado por meio da solução analítica proveniente do método de elementos analíticos. Esta, por sua vez, foi obtida por meio das expansões em Série de Laurent e Série de Taylor nas partes exterior e interior, respectivamente, de cada inomogeneidade cilíndrica. A disponibilidade das soluções individuais propiciou a aplicação do princípio da superposição para a obtenção da solução do problema de escoamento em termos de potencial de descarga. Esta representação, no entanto, necessitou um método iterativo para a determinação dos coeficientes das expansões em série, o qual utilizou o valor mínimo para as diferenças absolutas entre iterações sucessivas e um número máximo de iterações como critério de parada. A implementação do algoritmo foi realizada em linguagem Python v 3.6.7 e os resultados numéricos, após análise da convergência dos coeficientes do algoritmo, são apresentados em gráficos contendo o conjunto de inomogeneidades utilizadas e sua influência no comportamento das linhas de fluxo e potenciais. Estas, por meio da precisão e do detalhamento obtidos, mostraram a capacidade do MEA para a caracterização do escoamento e identificação de canais preferenciais, evidenciando sua aplicabilidade para situações reais.

**Palavras-chave** elementos analíticos, equação do fluxo, computação científica, integração numérica, Python<sup>R</sup>.

## 1 Introdução

O Método dos Elementos Analíticos (MEA) surgiu como uma opção para modelagem do escoamento subterrâneo, fazendo frente aos estabelecidos métodos dos elementos finitos e das diferenças finitas. É baseado na teoria do potencial e aplicável, primariamente, em problemas estacionários e escoamento bidimensional sob a hipótese de *Dupuit-Forchheimer*. Os detalhes podem ser encontrados em [16]. O desenvolvimento detalhado do MEA pode ser encontrado em [15] e [17] e, mais recentemente, [16]. Inicialmente, elementos mais simplificados são abordados por meio de variáveis cartesianas com discussão dos detalhes elementares da teoria. Nos casos mais complexos, em que há interação entre elementos, tais como inomogeneidades cilíndricas em um campo uniforme sob

---

<sup>1</sup>jp2@alumni.br

<sup>2</sup>correiajhr@gmail.com

<sup>3</sup>lezandro@gmail.com

<sup>4</sup>ew@sc.usp.br

a ação de poço de bombeamento, é necessário lançar mão das variáveis complexas. Neste caso, as inhomogeneidades interagem entre si e com os demais elementos, tornando necessário um método de solução matricial ou iterativo. Referências e discussões adicionais envolvendo o método de elementos analíticos, as quais englobam discussões sobre os métodos iterativos com inhomogeneidades circulares, fraturas ou *line-doublets* podem ser encontradas em [6], [11], [12], [1], [7]. Referências complementares envolvendo aplicações e discussões adicionais são [10], [4], [9], [2] e [13], [14].

O presente artigo discute resultados originados da implementação do método iterativo do tipo Gauss-Seidel, utilizado para o cálculo dos coeficientes da expansão em série de potências complexas para um aglomerado de inhomogeneidades cilíndricas. Quanto à distribuição das inhomogeneidades, um cenário com inhomogeneidades distribuídas regularmente e inhomogeneidades aleatoriamente distribuídas são considerados. A presença de poço de bombeamento e variação nas condutividades também são simuladas. Um aspecto interessante é a independência da escala que é ilustrada em alguns resultados gráficos.

## 2 Inhomogeneidades cilíndricas

Uma abordagem alternativa para o cálculo do potencial  $\Omega_c$  devido a presença de uma inhomogeneidade cilíndrica em campo uniforme é a utilização de expansão em série de potências complexas [1] da seguinte forma:

$$\Omega_c(Z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot Z^n, & |Z| < 1 \\ -\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \cdot Z^{-n}, & |Z| \geq 1 \end{cases} \quad (1)$$

em que  $Z = (z - z_c)/R_c$ ,  $a_0$  é um número real e os demais coeficientes  $a_n$  são números complexos.

Os cálculos dos coeficientes de várias inhomogeneidades devem levar em conta as interações mútuas existentes. Neste contexto, os autores seguiram a proposta de [1], com detalhes e referências adicionais apresentados em [6], no qual os coeficientes, dados em (2) e (3), são calculados via algoritmo iterativo:

$$a_{i,0}^{k+1} = \frac{k_c - k}{2 \cdot k \cdot \pi} \left[ \sum_{j \neq i}^N \int_0^{2\pi} \Phi_j(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} (\Phi_{unif}(\theta) + \Phi_w(\theta)) d\theta \right] \quad (2)$$

$$a_{i,n}^{k+1} = \frac{k_c - k}{(k_c + k) \cdot \pi} \left[ \sum_{j \neq i}^N \int_0^{2\pi} \Phi_j(\theta) e^{-in\theta} d\theta + \int_0^{2\pi} (\Phi_{unif}(\theta) + \Phi_w(\theta)) e^{-in\theta} d\theta \right] \quad (3)$$

em que  $N$  é o número de inhomogeneidades,  $i$  uma inhomogeneidade específica,  $k$  é o número de passos do processo iterativo,  $\Phi_{unif}$  representa o potencial do fluxo uniforme e  $\Phi_w$  o potencial do poço de bombeamento ou injeção. Detalhes adicionais podem ser encontrados em [1], [7] ou em [6] e referências lá apontadas. O critério de parada adotado para o algoritmo iterativo é a máxima diferença entre duas atualizações sucessivas. Em outras palavras, se  $A^{k+1}$  e  $A^k$  são as matrizes dos coeficientes das inhomogeneidades, então  $\epsilon = |A^{k+1} - A^k| < tol$  fornece o critério de parada do algoritmo iterativo com  $|\cdot|$  a norma de Frobenius [3, pg. 55], disponível em [18].

### 3 Detalhes computacionais

Um conjunto finito de inhomogeneidades circulares com centros em  $(x_{h_i}, y_{h_i})$ , em campo uniforme com condutividades escolhidas arbitrariamente é considerado. O número de pontos de controle são idênticos para todas as inhomogeneidades e em número  $M \geq 2 \cdot N + 1$  que, de acordo com [1], aumenta a precisão dos cálculos.

O código computacional foi desenvolvido utilizando a linguagem computacional Python 3.6.7 por meio do sistema *SciPy* [8], cujos componentes englobam as bibliotecas *NumPy* [18] e *Matplotlib* [5]. Inicialmente, as funções do potencial uniforme, poços e solução analítica do potencial para inhomogeneidade circular foram implementadas. A seguir, o algoritmo iterativo, conforme apresentado em [1], foi implementado utilizando uma matriz para armazenamento dos coeficientes das inhomogeneidades. De posse da função potencial, a carga hidráulica  $\phi$  pode ser calculada. Os resultados gráficos mostram as curvas de nível das funções  $\phi = \phi(x, y)$  e  $\Psi = \Psi(x, y)$ .

### 4 Resultados e discussões

Nesta seção os resultados para o método de elementos analíticos para agrupamentos de inhomogeneidades com e sem poço de bombeamento são apresentados.

#### 4.1 Inhomogeneidades cilíndricas com distribuição regular

Inhomogeneidades de raios idênticos  $r = l_1/N_i - \epsilon_{ino}$ , em que  $N_i$  é o número de inhomogeneidades e  $0 < \epsilon_{ino} \ll 1$  é um parâmetro para evitar sobreposição de alguma inhomogeneidade, são consideradas em um retângulo de lados  $l_1 = 2.2\text{cm}$  e  $l_2 = 2.6\text{cm}$ . A condutividade do meio é a média,  $\mu$ , de cem valores aleatórios no intervalo  $[0, 1]$ , enquanto que as condutividades das inhomogeneidades são  $10\mu \cdot a_i$ , em que  $a_i \in [0, 1]$ , obtido com semente  $s = 10$ .

A Figura 1 destaca as isolinhas de potencial e linhas de corrente para uma região em torno do aglomerado de inhomogeneidades cilíndricas para a expansão em série com grau  $N = 10$ . De forma geral, é possível identificar algumas regiões preferenciais para o fluxo por meio da observação do agrupamento de linhas de fluxo em algumas inhomogeneidades. Outro elemento é o comportamento aparentemente contínuo do fluxo entre inhomogeneidades pareadas para as regiões preferenciais. As regiões destacadas na figura servem para ilustrar.

#### 4.2 Inhomogeneidades cilíndricas distribuídas de forma aleatória

As condutividades foram geradas aleatoriamente com NumPy [18], semente  $s = 1000$  e os respectivos valores multiplicados por cem. A condutividade do meio foi estabelecida em  $k = 1$  e as condutividades das inhomogeneidades de números 5 até 25 foram modificadas de forma que  $k_{c_i} = 0, 1$  para  $i = 5, \dots, 25$ . A Figura 2 destaca as isolinhas de potencial e linhas de corrente para a expansão em série com grau  $N = 5$  em cada inhomogeneidade. Analogamente ao caso anterior, há convergência das linhas de corrente para inhomogeneidades com maior condutividade, enquanto que as inhomogeneidades com baixa condutividade modificam o fluxo uniforme devido à baixa condutividade em relação ao meio.

As regiões destacadas na Figura 2 são mostradas nas Figuras 3-a,b. Neste caso, a convergência das linhas de corrente para as inhomogeneidades com condutividades maiores que a condutividade do meio e a divergência das linhas de corrente para inhomogeneidades com condutividades menores que a condutividade do meio pode ser observada. Também deve ser notada a presença de uma inhomogeneidade com diâmetro relativo reduzido, a qual não é aparente na escala inicial, mas pode ser explorada e analisada de forma consistente conforme mostrado na Figura 3-b.

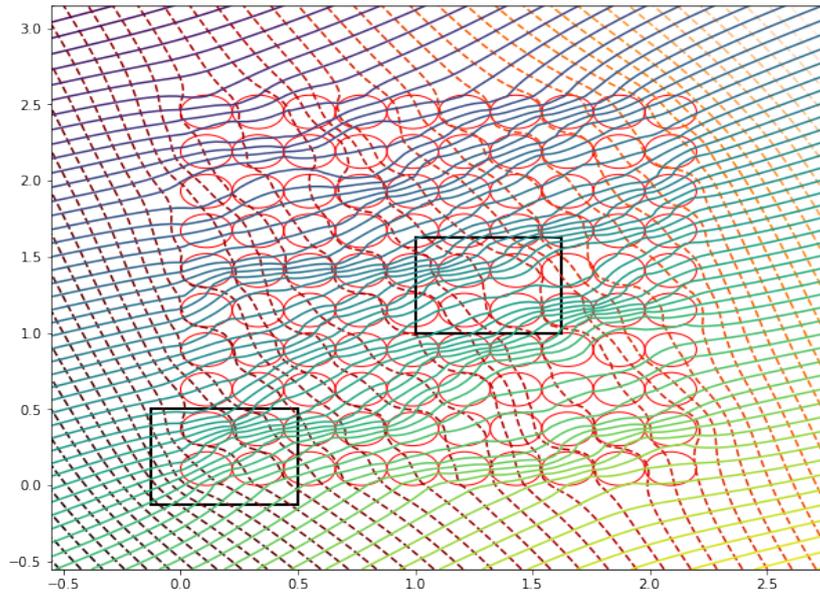


Figura 1: Linhas de potenciais e linhas de corrente de  $\phi$  e  $\Psi$ , respectivamente para um aglomerado de inhomogeneidades cilíndricas.

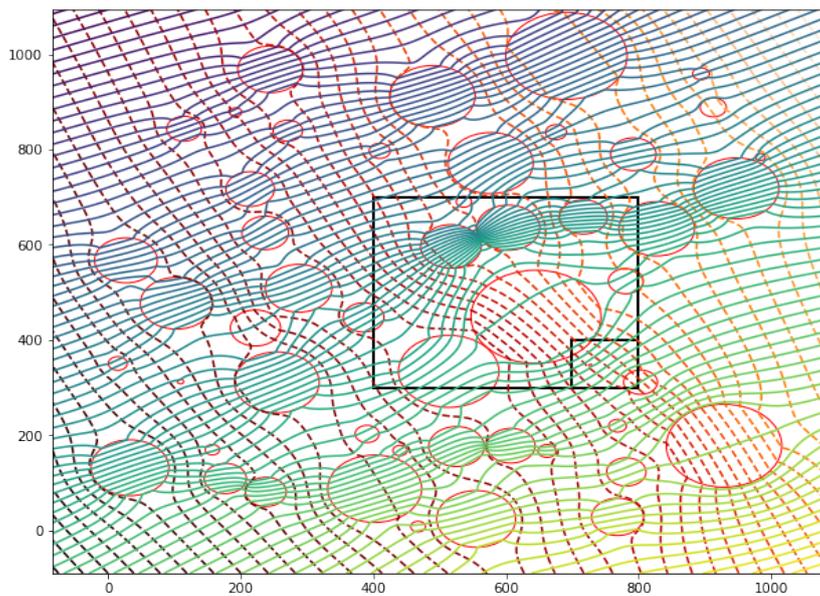


Figura 2: Isolinhas de potencial e linhas de corrente de  $\phi$  e  $\Psi$ , respectivamente, para um aglomerado de inhomogeneidades cilíndricas aleatórias.

O efeito da operação de um poço de bombeamento nas linhas de fluxo foi observado na Figura 4. Neste caso, o fluxo uniforme é perturbado pelas inhomogeneidades e pelo bombeamento constante do poço. A extração forçada impõe uma movimentação na direção do poço que, por sua vez, tende

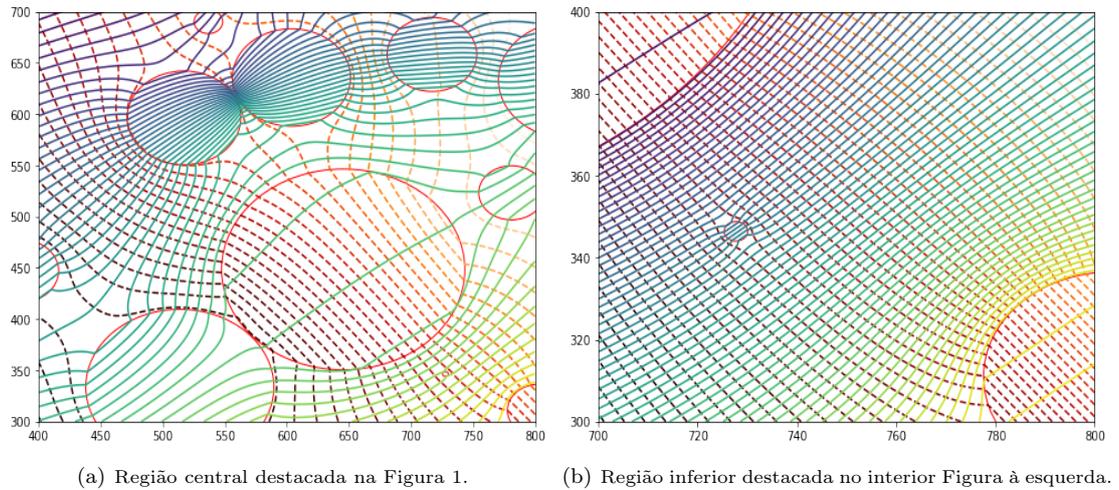


Figura 3: Isolinhas de potencial e de corrente para as regiões destacadas na Figura 2.

a ser balanceada pelo campo uniforme. O conjunto de elementos contribui para a perda da simetria da curva de separação em relação ao caso em que há apenas um poço de bombeamento em fluxo uniforme. Outro elemento importante é que agora não é possível obter o ponto de estagnação de forma analítica. Ambos os elementos, a simetria da curva de separação e o cálculo do ponto de estagnação sem a presença das inhomogeneidades podem ser observados em [15].

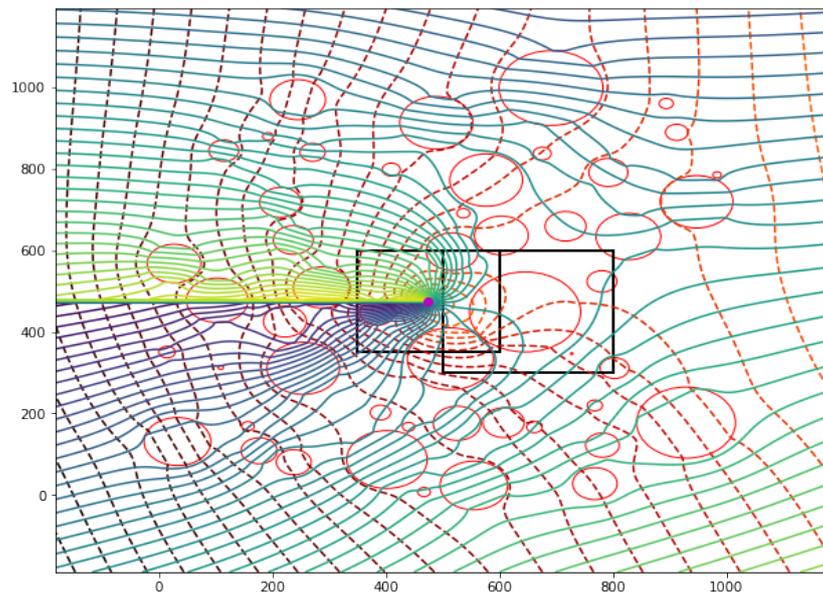


Figura 4: Linhas de potenciais e linhas de corrente de  $\phi$  e  $\Psi$ , respectivamente, para um aglomerado de inhomogeneidades cilíndricas aleatoriamente distribuídas.

Uma exploração adicional é fornecida nas Figuras 5-a,b. A primeira evidência a convergência das linhas de fluxo para o poço e destaca a influência conjunta das inhomogeneidades com diferentes

condutividades. A segunda mostra a divergência das linhas de corrente das inhomogeneidades com condutividades baixas em relação a condutividade do meio. Destaca também a presença de um canal de fluxo entre as duas inhomogeneidades com  $k_{ci} = 0, 1$ .

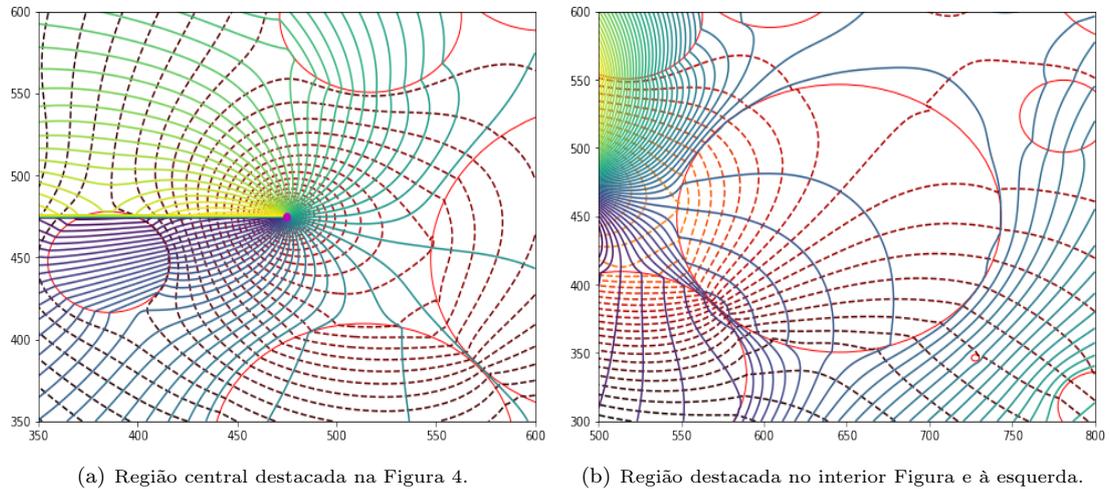


Figura 5: Linhas isotenciais e de corrente para as regiões destacadas na Figura 4.

## 5 Conclusões

O método de elementos analíticos foi utilizado para obter o potencial complexo devido a presença de um aglomerado de inhomogeneidades cilíndricas em campo uniforme. Um poço foi adicionado ao sistema para a observação da influência do bombeamento. Os coeficientes da expansão em série de potências complexas foi obtido por meio do método iterativo de Gauss-Seidel, tendo como critérios de parada a norma de Frobenius ou o número de iterações. A implementação do algoritmo utilizou linguagem Python v 3.6.7. Os resultados consideram um aglomerado de inhomogeneidades uniformemente distribuídas e raios constantes em conjunto com um cenário com inhomogeneidades localizadas aleatoriamente sobre o domínio com raios aleatórios, porém fixos. A precisão e o detalhamento obtidos mostraram a capacidade do MEA para a caracterização do escoamento e identificação de canais preferenciais ou estudos mais detalhados em regiões específicas do domínio computacional. A possibilidade de combinar com o mesmo formalismo elementos grandes e pequenos fornece um elemento adicional à capacidade do MEA, uma vez que não há necessidade de construção de malha de discretização do domínio.

## Referências

- [1] R. Barnes e I. Jankovic. “Two-dimensional flow through large numbers of circular inhomogeneities”. Em: **Journal of Hydrology** 226.3 (dez. de 1999), pp. 204–210. ISSN: 0022-1694. DOI: 10.1016/S0022-1694(99)00142-0. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022169499001420>.
- [2] V. F. Boico. “Modelo analítico para a avaliação do escoamento de água no Aquífero Guarani em Bauru/SP”. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, EESC-USP, 2016. URL: [Escola%20de%20Engenharia%20de%20S%C3%A3o%20Carlos/USP](http://www.escc.usp.br/engenharia/20de%20S%C3%A3o%20Carlos/USP).

- [3] G. H. Golub e C. F. Van Loan. **Matrix Computations**. 3<sup>a</sup> ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [4] J. R. Hunt. “Ground Water Modeling Applications Using the Analytic Element Method”. en. Em: **Groundwater** 44.1 (2006), pp. 5–15. ISSN: 1745-6584. DOI: 10.1111/j.1745-6584.2005.00143.x. URL: <https://ngwa.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1745-6584.2005.00143.x>.
- [5] J. D. Hunter. “Matplotlib: A 2D graphics environment”. Em: **Computing In Science & Engineering** 9.3 (2007), pp. 90–95.
- [6] S. M. Hussain. “Simulation of groundwater flow by the analytic element method”. Tese de doutorado. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação-ICMC-USP, 2017.
- [7] I. Janković e R. Barnes. “High-order line elements in modeling two-dimensional groundwater flow”. Em: **Journal of Hydrology** 226.3 (1999), pp. 211–223. ISSN: 0022-1694. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(99\)00140-7](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(99)00140-7). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022169499001407>.
- [8] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson et al. **SciPy: Open source scientific tools for Python**. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [9] S. R. Kraemer. “Analytic Element Ground Water Modeling as a Research Program (1980 to 2006)”. en. Em: **Groundwater** 45.4 (2007), pp. 402–408. ISSN: 1745-6584. DOI: 10.1111/j.1745-6584.2007.00314.x. URL: <https://ngwa.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1745-6584.2007.00314.x>.
- [10] W. J. De Lange. “Development of an Analytic Element Ground Water Model of the Netherlands”. en. Em: **Groundwater** 44.1 (2006), pp. 111–115. ISSN: 1745-6584. DOI: 10.1111/j.1745-6584.2005.00142.x. URL: <https://ngwa.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1745-6584.2005.00142.x>.
- [11] I. S. P. Marin. “Aperfeiçoamento do método de elementos analíticos para simulação de escoamento em rochas porosas fraturadas”. Tese de doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, EESC-USP, 2011. URL: <Escola%20de%20Engenharia%20de%20S%C3%A3o%20Carlos/USP>.
- [12] I. S. P. Marin, E. Wendland e O.D. Strack. “Simulating groundwater flow in fractured porous rock formations using the analytic element method”. Em: **XIX International Conference on Water Resources, Computational Methods in Water Resources**. 2012.
- [13] J.P.M. Santos et al. “Fluxo para Poços em Aquíferos: Solução via Método de Elementos Analíticos”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematic**. Vol. 7. 1. 2020.
- [14] J.P.M. Santos et al. “Fluxo para Poços em Aquíferos: Solução via Método de Elementos Analíticos”. Em: **Trends in Computational and Applied Mathematics** 21.2 (2020).
- [15] O. Strack. **Groundwater Mechanics**. Prentice Hall, 1989.
- [16] O. Strack. **Groundwater Mechanics**. Cambridge University Press, 2017.
- [17] O. Strack e H. Haitjema. **Analytic Element Modeling of Groundwater Flow**. Academic Press, 1995.
- [18] S. van der Walt, S.C. Colbert e G. Varoquaux. “The NumPy Array: A Structure for Efficient Numerical Computation”. Em: **Computing in Science Engineering** 13.2 (mar. de 2011), pp. 22–30. ISSN: 1521-9615. DOI: 10.1109/MCSE.2011.37.