

# Verificação numérica dos resultados assintóticos do escoamento viscoelástico Giesekus para o problema da contração 4:1

Irineu L. Palhares Junior<sup>1</sup>

IMD/UFRN, Natal, RN

Cassio M. Oishi<sup>2</sup>

FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP

Fabiano Ruano Neto<sup>3</sup>

ICMC/USP, São Carlos, SP

**Resumo.** Neste trabalho verificamos numericamente o comportamento assintótico do tensor polimérico  $\mathbf{T}^p \sim r^{-0.2796}$  para o fluido viscoelástico Giesekus em uma contração 4:1. Além da usual formulação Cartesiana (CSF), também usamos a formulação natural do tensor (NSF), indicada para escoamentos com singularidade. Desta forma, também verificamos o comportamento assintótico das variáveis naturais  $\lambda \sim r^{-1.3686}$ ,  $\mu \sim r^{0.0}$  e  $\nu \sim r^{1.3686}$ . Estas verificações justificam-se pela necessidade de se estabelecer uma relação entre o conhecimento assintótico e numérico para escoamentos de fluidos complexos, visando a melhoria dos métodos numéricos para este tipo de escoamento.

**Palavras-chave.** Contração 4:1, Escoamento Viscoelástico, Giesekus, Análise Assintótica, Singularidades

## 1 Introdução

O estudo de escoamento de fluidos viscoelásticos em uma contração é considerado um problema *benchmark* para a validação/verificação de códigos e métodos numéricos [1, 2]. Por outro lado, este é um problema desafiador em reologia computacional devido à presença de singularidades geométricas. Esta característica impõe dificuldades aos métodos numéricos, resultando em instabilidades e resultados numéricos não acurados. Um método auxiliar no entendimento de tais escoamentos é o estudo assintótico. Podemos destacar os estudos feitos para os fluidos Oldroyd-B e Upper Convected Maxwell (UCM) [4, 11, 13], PTT [6, 8, 15] e, mais recentemente, Giesekus [5]. Assim, de modo a verificar tais aproximações assintóticas, Alves et al. [1] verificou o comportamento singular (inclinação ou taxa de variação na qual as tensões tendem ao infinito) para os modelos Oldroyd-B e PTT. Mais recentemente, Evans et al. [10] verificou numericamente o comportamento singular das tensões e das variáveis naturais (resultantes de uma formulação alternativa para o cálculo da contribuição viscoelástica [14]) do modelo Oldroyd-B sob um campo de velocidade Newtoniano. Entretanto, não há na literatura a verificação numérica dos resultados assintóticos para o modelo viscoelástico Giesekus. Desta forma, neste trabalho apresentamos a verificação numérica dos resultados assintóticos para o modelo Giesekus [5]. Mais especificamente, serão verificados a taxa de variação com a qual as tensões tendem ao infinito, bem como a inclinação das variáveis naturais.

---

<sup>1</sup>irineu.palhares@imd.ufrn.br

<sup>2</sup>cassiooishi@gmail.com

<sup>3</sup>fabianoruano@gmail.com

## 2 Equações Governantes

As equações que governam um escoamento incompressível e isotérmico, equações do movimento e da continuidade, são dadas, respectivamente por

$$\text{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \beta \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{T}^p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

onde  $\mathbf{v}$  é o campo de velocidade,  $p$  a pressão,  $\mathbf{T}^p$  o tensor da contribuição viscoelástica,  $Re$  o número de Reynolds e  $\beta$  a razão entre as viscosidades do solvente e total. Além disso, como estamos trabalhando com um escoamento viscoelástico, precisamos da equação constitutiva para o tensor  $\mathbf{T}^p$ . Assim, a equação constitutiva para o escoamento viscoelástico Giesekus, na sua forma adimensional, é dada por

$$\mathbf{T}^p + \text{Wi} \left( \overset{\nabla}{\mathbf{T}}^p + \frac{\kappa}{(1-\beta)} (\mathbf{T}^p)^2 \right) = 2(1-\beta) \mathbf{D}, \quad (2)$$

onde  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$  é o tensor taxa de deformação e  $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}^p = \frac{\partial \mathbf{T}^p}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{T}^p - (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{T}^p - \mathbf{T}^p (\nabla \mathbf{v})^T$  a derivada convectada superior de  $\mathbf{T}^p$ .

Uma outra forma de se calcular a contribuição viscoelástica do escoamento é por meio da formulação natural do tensor [14]. Para isto, decomparamos o tensor  $\mathbf{T}^p$  da seguinte forma:

$$\mathbf{T}^p = \frac{(1-\beta)}{Wi} (\lambda \mathbf{v} \mathbf{v}^T + \mu (\mathbf{v} \mathbf{w}^T + \mathbf{w} \mathbf{v}^T) + \nu \mathbf{w} \mathbf{w}^T - \mathbf{I}), \quad (3)$$

com  $\mathbf{v} = (u, v)^T$  e  $\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} (-v, u)^T$ .

Na sequência, substituímos a equação (3) em (2), resultando no seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} & \text{Wi} \left[ \frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \lambda + \frac{2}{|\mathbf{v}|^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \left( \lambda u + \mu \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left( \lambda v - \mu \frac{u}{|\mathbf{v}|^2} \right) \right) + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{w} \right] + \\ & \left( \lambda - \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \right) + \kappa \left[ \left( \lambda - \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} \right)^2 |\mathbf{v}|^2 + \frac{\mu^2}{|\mathbf{v}|^2} \right] = 0, \\ & \text{Wi} \left[ \frac{\partial \mu}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mu + \frac{\partial u}{\partial t} \left( -\lambda v + \nu \frac{v}{|\mathbf{v}|^4} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left( u \lambda - \nu \frac{u}{|\mathbf{v}|^4} \right) + \nu \nabla \cdot \mathbf{w} \right] + \mu \\ & + \kappa \left( \lambda |\mathbf{v}|^2 - 2 + \frac{\nu}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mu = 0, \\ & \text{Wi} \left[ \frac{\partial \nu}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nu - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \left( \nu \frac{u}{|\mathbf{v}|^2} + \mu v \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left( \nu \frac{v}{|\mathbf{v}|^2} - \mu u \right) \right) \right] + (\nu - |\mathbf{v}|^2) \\ & + \kappa \left[ (\nu - |\mathbf{v}|^2)^2 \frac{1}{|\mathbf{v}|^2} + \mu^2 |\mathbf{v}|^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

com  $\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{v}|^4} \left[ (v^2 - u^2) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 4uv \frac{\partial u}{\partial x} \right]$ .

A aplicação da formulação NSF, equação (4), tem sido feita recentemente no estudo numérico de escoamentos transientes com singularidades [9, 10].

## 3 Resultados Assintóticos

Nesta seção, apresentamos um resumo dos principais resultados assintóticos do modelo viscoelástico Giesekus para o escoamento em uma contração 4:1. Na Figura 1 apresentamos a geometria

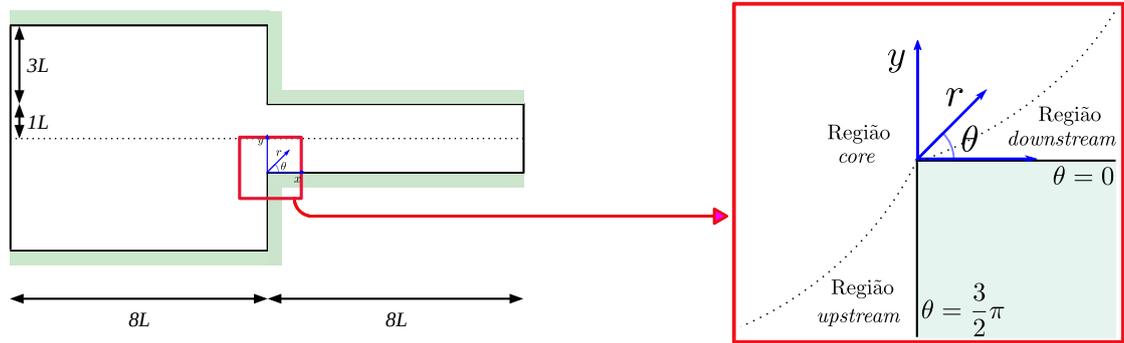


Figura 1: Geometria da contração 4:1 com zoom ao redor da singularidade.

Tabela 1: Comportamento assintótico para o escoamento viscoelástico Giesekus quando  $r \rightarrow 0$ .

$\mathbf{v}$	$p$	$\mathbf{T}^p$	$\lambda$	$\mu$	$\nu$
$r^{0.5445}$	$r^{-0.4555}$	$r^{-0.3286}$	$r^{-1.3686}$	$r^{0.0}$	$r^{1.3686}$

da contração. Note que, definimos a origem do sistema de coordenadas em um dos pontos de singularidade, mais especificamente na quina inferior da contração. Também, além das usuais coordenadas Cartesianas  $xOy$ , adicionamos as coordenadas polares  $rO\theta$  para ilustrar o significado de  $r$  e de suas potências no comportamento singular das propriedades.

A singularidade do campo de velocidade, bem como da pressão, foram determinadas inicialmente nos trabalhos de Dean and Montagnon [3] (Ver também Moffatt [12]). Posteriormente, a partir do conhecimento do campo de velocidade Newtoniano, Evans [5] determinou o comportamento assintótico para o escoamento viscoelástico do modelo Giesekus, isto é, o perfil singular do tensor  $\mathbf{T}^p$  e das variáveis naturais  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  quando  $r \rightarrow 0$ , bem como a espessura da camada limite. Assim, de maneira resumida, apresentamos na Tabela 1 o comportamento assintótico das propriedades do escoamento para  $r \rightarrow 0$ . Conforme podemos notar, ao passo que as três componentes do tensor polimérico  $T_{11}^p$ ,  $T_{12}^p$  e  $T_{22}^p$  vão para infinito com a mesma potência  $r^{-0.3286}$ , as três variáveis da formulação natural tem comportamentos distintos, sendo que apenas  $\lambda$  tem expoente negativo. Essa particularidade também pode ser observada no escoamento do fluido PTT [6].

## 4 Resultados Numéricos

Para as simulações numéricas utilizamos os seguintes parâmetros:  $\beta = 0.5$ ,  $Re = 0.01$ ,  $Wi = 1$  e  $\kappa = 0.1$ . A metodologia usada para discretizar as equações (1)–(4), é o método de diferenças finitas para malhas deslocadas (*staggered grid*). Para mais informações sobre a metodologia numérica usada neste trabalho, veja o seguinte artigo de Evans et al. [7]. Além disso, simulamos o escoamento com duas formulações diferentes para as equações constitutivas, CSF e NSF.

Na Figura 2 apresentamos a verificação do comportamento assintótico de todas as variáveis do sistema de equações (1)–(4) ao longo da linha  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (veja Figura 1) para  $r \rightarrow 0$ . Observamos na Figura 2 (a) uma boa concordância do perfil das variáveis  $u$  e  $v$  com a inclinação esperada assintoticamente. Por outro lado, isso não é verdade para o caso da pressão, Figura 2 (b). Entretanto, podemos afirmar que a formulação NSF trouxe melhorias ao resultado da pressão, uma vez que o perfil de  $p$  com a formulação NSF está mais próximo da inclinação esperada, quando comparado com a formulação CSF. De maneira semelhante, há uma melhor concordância das componentes

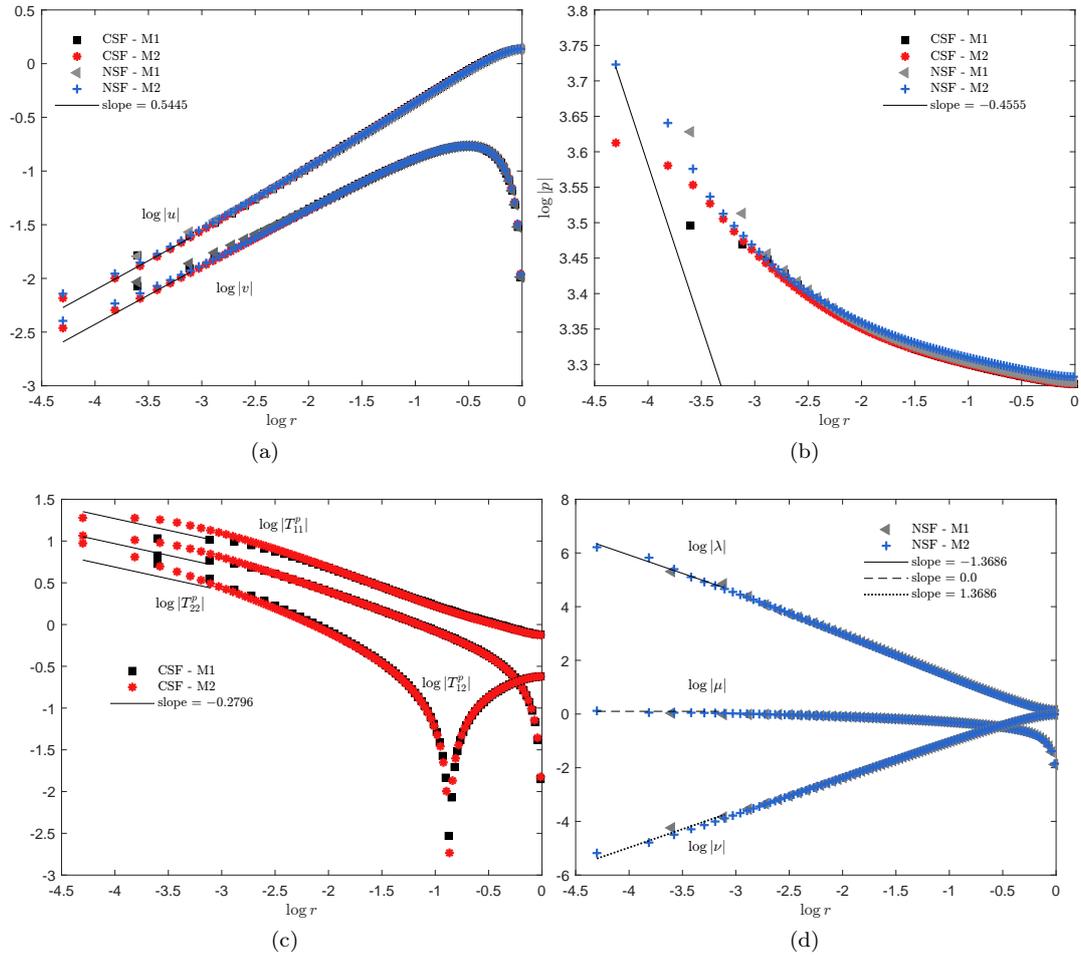


Figura 2: Verificação do comportamento assintótico para as propriedades: (a)  $v$ ; (b)  $p$ ; (c)  $T^p$  e (d)  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

do tensor para a formulação NSF do que para a formulação CSF, conforme pode ser observado nas Figuras 2 (c) e (d). Esse mesmo efeito foi observado nos trabalhos de Evans et al. [9, 10]. Esses resultados estão de acordo com a análise feita em [7] para a formulação NSF com o modelo Oldroyd-B, onde é sugerido o uso da formulação NSF em escoamentos com singularidades.

Portanto, de maneira resumida, podemos afirmar que os resultados assintóticos estão consistentes com as aproximações numéricas aqui apresentadas, verificando os resultados assintóticos desenvolvidos em [5].

## 5 Considerações Finais

Os resultados numéricos apresentados neste trabalho demonstraram boa concordância com os resultados assintóticos. Em particular, vimos que as variáveis naturais, bem como a pressão com o uso da formulação NSF, demonstraram maior concordância com os resultados assintóticos, representados por potências de  $r$ , do que a formulação CSF.

A verificação realizada neste trabalho é importante, pois ela estabelece a conexão entre os resultados numéricos e assintóticos, viabilizando a combinação de metodologias. Portanto, o próximo passo deste trabalho será inserir o conhecimento assintóticos dentro do código numérico, visando a obtenção de resultados mais acurados.

## Agradecimentos

Agradecemos o suporte financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo n<sup>o</sup> 2021/05727-2.

## Referências

- [1] M. A. Alves, P. J. Oliveira e F. T. Pinho. “Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions”. Em: **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** 110.1 (2003), pp. 45–75.
- [2] M. A. Alves, P. J. Oliveira e F. T. Pinho. “On the effect of contraction ratio in viscoelastic flow through abrupt contractions”. Em: **Journal of non-newtonian fluid mechanics** 122.1-3 (2004), pp. 117–130.
- [3] W. R. Dean e P. E. Montagnon. “On the steady motion of viscous liquid in a corner”. Em: **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**. Vol. 45. 3. Cambridge University Press. 1949, pp. 389–394.
- [4] J. D. Evans. “Re-entrant corner flows of the upper convected Maxwell fluid”. Em: **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences** 461.2053 (2005), pp. 117–142.
- [5] J. D. Evans. “Re-entrant corner behaviour of the Giesekus fluid with a solvent viscosity”. Em: **Journal of non-newtonian fluid mechanics** 165.9-10 (2010), pp. 538–543.
- [6] J. D. Evans. “Re-entrant corner behaviour of the PTT fluid with a solvent viscosity”. Em: **Journal of non-newtonian fluid mechanics** 165.9-10 (2010), pp. 527–537.
- [7] J. D. Evans, H. L. França e C. M. Oishi. “Application of the natural stress formulation for solving unsteady viscoelastic contraction flows”. Em: **Journal of Computational Physics** 388 (2019), pp. 462–489.
- [8] J. D. Evans e D. N. Sibley. “Re-entrant corner flows of PTT fluids in the Cartesian stress basis”. Em: **Journal of non-newtonian fluid mechanics** 153.1 (2008), pp. 12–24.
- [9] J. D. Evans et al. “Numerical study of the stress singularity in stick-slip flow of the Phan-Thien Tanner and Giesekus fluids”. Em: **Physics of Fluids** 31.9 (2019), p. 093101.
- [10] J. D. Evans et al. “Testing viscoelastic numerical schemes using the Oldroyd-B fluid in Newtonian kinematics”. Em: **Applied Mathematics and Computation** 387 (2020), p. 125106.
- [11] E. J. Hinch. “The flow of an Oldroyd fluid around a sharp corner”. Em: **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics** 50.2-3 (1993), pp. 161–171.
- [12] H. K. Moffatt. “Viscous and resistive eddies near a sharp corner”. Em: **Journal of Fluid Mechanics** 18.1 (1964), pp. 1–18.
- [13] M. Renardy. “A matched solution for corner flow of the upper convected Maxwell fluid”. Em: **Journal of non-newtonian fluid mechanics** 58.1 (1995), pp. 83–89.

- [14] M. Renardy. “How to integrate the upper convected Maxwell (UCM) stresses near a singularity (and maybe elsewhere, too)”. Em: **Journal of non-newtonian fluid mechanics** 52.1 (1994), pp. 91–95.
- [15] M. Renardy. “Re-entrant corner behavior of the PTT fluid”. Em: **Journal of non-newtonian fluid mechanics** 69.1 (1997), pp. 99–104.