Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Lema de Barbalat fracionário: limitações e aplicações

Noemi Zeraick Monteiro[1], Sandro Rodrigues Mazorche[2]
UFJF, Juiz de Fora, MG

Resumo. Neste trabalho, é apresentado um lema de Barbalat fracionário e sua demonstração, segundo proposto em [1]. A demonstração é analisada de maneira a evidenciar uma imprecisão, o que é corroborado por um contraexemplo de [2]. Em seguida, é apresentada uma versão corrigida do lema, ainda segundo [2]. Finalizamos com um exemplo de aplicação ao modelo SIR fracionário. O objetivo do trabalho é chamar a atenção para as potencialidades e limitações de um lema de Barbalat fracionário, dada a sua utilização em inúmeros artigos recentes.

Palavras-chave. Lema de Barbalat, Cálculo Fracionário, Integral de Riemann-Liouville, Limites.

1 Introdução

O Cálculo Fracionário tem sido amplamente utilizado na modelagem matemática, sobretudo devido ao seu potencial de explicitar a dependência de estágios anteriores através de operadores não locais. Assim, é natural que as teorias do cálculo clássico, em particular das equações diferenciais de ordem inteira, sejam revisitadas, tendo em vista sua possível adaptação ao Cálculo Fracionário. Essa adaptação, porém, nem sempre é imediata.

Aqui, o interesse é verificar a validade de um lema de Barbalat fracionário. Na teoria de EDO's, o lema de Barbalat é um resultado matemático relativo a propriedades assintóticas de funções e suas derivadas. Quando usado corretamente para sistemas dinâmicos, particularmente sistemas não autônomos, pode levar à solução de muitos problemas de estabilidade assintótica. Em linhas gerais, ele trata da convergência a zero de uma função suficientemente bem comportada cuja integral é limitada.

Uma ideia intuitiva para a generalização desse lema seria considerar a integral fracionária de ordem α no enunciado. Essa generalização foi utilizada, por exemplo, em [1], [3] e [4]. Porém, como ilustrado em [2], artigo anterior a todos os supracitados, o lema não é verificado para $0 < \alpha < 1$. Inclusive, embora os autores de [2] sejam citados em [1] e [3] para a obtenção de outros resultados, a falibilidade do lema não é considerada. Assim, acreditamos na necessidade de fornecer uma revisão das demonstrações de [1] e [2], comparando os resultados. Esperamos atrair a atenção dos pesquisadores ao cuidado com a utilização do lema de Barbalat fracionário. Finalizamos com um exemplo de aplicação ao modelo SIR com a derivada de Caputo.

2 O clássico lema de Barbalat

Antes de discutir o lema de Barbalat, relembramos dois pontos sobre propriedades assintóticas de funções e suas derivadas. Dada uma função de t, os fatos a seguir são importantes:

[1]nzmonteiro@ice.ufjf.br
[2]sandro.mazorche@ufjf.br

Observação 2.1. *O limite $df/dt \to 0$ não implica na convergência de f. Considere, por exemplo, a função $f(t) = \sin(\log t)$. Enquanto*

$$\frac{df}{dt} = \frac{\cos(\log t)}{t} \to 0, \tag{1}$$

a função f continua oscilando, cada vez mais lentamente [5].

Observação 2.2. *A convergência de f não implica $df/dt \to 0$. Por exemplo, a função não negativa $f(t) = e^{-t}\sin^2(e^{2t})$ tende a zero, mas sua derivada*

$$\frac{df}{dt} = 4e^t\cos(e^{2t})\sin(e^{2t}) - e^{-t}\sin^2(e^{2t}) \tag{2}$$

é ilimitada [5].

Agora, dado que uma função tende para um limite finito, que requisito adicional pode garantir que sua derivada realmente convirja para zero? O lema de Barbalat indica que a própria derivada deve ter alguma suavidade. Mais precisamente,

Lema 2.1 (Barbalat)**.** *Se a função diferenciável $f(t)$ tem um limite finito quando $t \to \infty$, e se df/dt é uniformemente contínua, então $df/dt \to 0$ quando $t \to \infty$.*

A demonstração pode ser consultada em [5]. Para aplicar o lema de Barbalat à análise de sistemas dinâmicos, normalmente utiliza-se o seguinte corolário imediato:

Lema 2.2 (Lema "tipo-Lyapunov")**.** *Se uma função escalar $V(x,t)$ satisfaz as seguintes condições:*

- *$V(x,t)$ é limitada inferiormente,*
- *$\dot{V}(x,t)$ é negativa semidefinida,*
- *$\dot{V}(x,t)$ é uniformemente contínua no tempo,*

então $\dot{V}(x,t) \to 0$ quando $t \to \infty$ [5] .

De fato, V se aproxima de um valor limite finito V_∞, tal que $V_\infty \leq V(x(0), 0)$ (isto não requer continuidade uniforme). O lema acima segue então do lema de Barbalat.

Neste trabalho, utilizamos a seguinte versão do lema, a qual pode ser obtida diretamente da primeira:

Lema 2.3 (Barbalat)**.** *Se a função não negativa uniformemente contínua $f(t)$ em $[0, \infty]$ é tal que $\int_0^t f(t)dt < C$, para alguma constante C e todo $t > 0$, então $f(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.*

3 Lema de Barbalat fracionário: o problema da generalização

Consideramos $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo finito, $\alpha \in \mathbb{C}$, e $0 \leq n - 1 < Re(\alpha) < n$, com $n \in \mathbb{N}$. Utilizamos a seguinte definição:

Definição 3.1 (Integral de Riemann-Liouville em intervalos finitos)**.** *A integral de Riemann-Liouville (à esquerda) de ordem arbitrária α é definida para $t \in [a, b]$ por:*

$$I^\alpha_{a+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\theta)^{\alpha-1} f(\theta) d\theta. \tag{3}$$

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0268

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 9, n. 1, 2022.

Em [1] e referências correlatas, encontramos o lema de Barbalat fracionário a seguir:
Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua em $[t_0, \infty]$, e $I^{\alpha}_{t_0+}|\phi(t)|^p \le M$ para todo $t > 0$, com $\alpha \in (0, 1)$, p e M duas constantes positivas. Então,

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0 \tag{4}$$

Vamos discutir a demonstração apresentada. Supomos, por absurdo, que existe um escalar positivo ε e uma sequência $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ com $t_k \to \infty$ tal que $|\phi(t_k)| > \varepsilon$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $|t_{k+1} - t_k| > \delta_0$ para todo k. Isto implica que os intervalos $[t_k - \delta_0/2, t_k + \delta_0/2]$ não se sobrepõem. Pela continuidade uniforme de ϕ, existe um δ, que vamos supor, sem perda de generalidade, menor que $\delta_0/2$, tal que

$$|\phi(t') - \phi(t'')| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

para quaisquer t', t'' tais que $|t' - t''| < \delta$. Então, para todo t em $[t_k - \delta, t_k + \delta]$, temos

$$|\phi(t)| \ge |\phi(t_k)| - |\phi(t_k) - \phi(t)| > \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

de onde

$$|\phi(t)|^p > \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \tag{7}$$

Se $0 < \alpha < 1$ e $n > k$, temos $-2\delta/(t_n - t_k + \delta) > -1$, e, pela desigualdade de Bernoulli,

$$\left(1 - \frac{2\delta}{t_n - t_k + \delta}\right)^{\alpha} \le 1 - \frac{2\delta\alpha}{t_n - t_k + \delta} \tag{8}$$

ou seja,

$$1 - \left(1 - \frac{2\delta}{t_n - t_k + \delta}\right)^{\alpha} \ge \frac{2\delta\alpha}{t_n - t_k + \delta} \tag{9}$$

Logo, para $n > k$, temos

$$\begin{aligned}
(t_n - t_k + \delta)^{\alpha} - (t_n - t_k - \delta)^{\alpha} &= (t_n - t_k + \delta)^{\alpha}\left[1 - \left(1 - \frac{2\delta}{t_n - t_k + \delta}\right)^{\alpha}\right], \\
&\ge (t_n - t_k + \delta)^{\alpha}\left(\frac{2\delta\alpha}{t_n - t_k + \delta}\right), \\
&= \frac{2\delta\alpha}{(t_n - t_k + \delta)^{1-\alpha}} \ge 2\delta\alpha(t_n - t_1 + \delta)^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
& I^{\alpha}_{t_0+}|\phi(t)|^p = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t_n} |\phi(\tau)|^p (t_n - \tau)^{\alpha-1} d\tau, \\
& \ge \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k-\delta}^{t_k+\delta} |\phi(\tau)|^p (t_n - \tau)^{\alpha-1} d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_n-\delta}^{t_n} |\phi(\tau)|^p (t_n - \tau)^{\alpha-1} d\tau, \\
& \ge \frac{\varepsilon^p}{2^p\alpha\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{n-1} [(t_n - t_k + \delta)^{\alpha} - (t_n - t_k - \delta)^{\alpha}] + \frac{\varepsilon^p\delta^{\alpha}}{2^p\alpha\Gamma(\alpha)}, \\
& \ge \frac{\varepsilon^p(n-1)\delta(t_n - t_1 + \delta)^{\alpha-1}}{2^{p-1}\Gamma(\alpha)} + \frac{\varepsilon^p\delta^{\alpha}}{2^p\alpha\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}$$

Aqui ocorre uma situação delicada, pois é considerado $\gamma = \max\{t_{k+1} - t_k\}, k = 1, 2, \cdots, n-1$. Com essa suposição, tem-se

$$I^{\alpha}_{t_0+}|\phi(t)|^p \geq \frac{\varepsilon^p(n-1)\delta[(n-1)\gamma+\delta]^{\alpha-1}}{2^{p-1}\Gamma(\alpha)} + \frac{\varepsilon^p\delta^\alpha}{2^p\alpha\Gamma(\alpha)},$$
$$= \frac{\varepsilon^p(n-1)^\alpha\delta}{2^{p-1}\Gamma(\alpha)[\gamma+\delta/(n-1)]^{1-\alpha}} + \frac{\varepsilon^p\delta^\alpha}{2^p\alpha\Gamma(\alpha)}.$$

Logo, fazendo $n \to \infty$, obtemos $I^{\alpha}_{t_0+}|\phi(t)|^p \to \infty$, contradição. Portanto, $\phi(t) \to 0$.

Observação 3.1. *A demonstração acima considera $\gamma = \max\{t_{k+1}-t_k\}, k = 1, 2, \cdots, n-1$. Assim, γ depende de n. Se escrevemos γ_n para lembrar essa dependência, o que obtemos é*

$$I^{\alpha}_{t_0+}|\phi(t)|^p \geq \frac{\varepsilon^p(n-1)^\alpha\delta}{2^{p-1}\Gamma(\alpha)[\gamma_n+\delta/(n-1)]^{1-\alpha}} + \frac{\varepsilon^p\delta^\alpha}{2^p\alpha\Gamma(\alpha)}. \tag{10}$$

Ao fazermos $n \to \infty$, devemos ser capazes de estudar $\lim_{n\to\infty}\gamma_n$. Se tivermos $\limsup_{n\to\infty}\gamma_n = L$ para L finito, então a demonstração será válida. Porém, se ocorrer $\limsup_{n\to\infty}\gamma_n = \infty$, a finalização da prova é inválida.

Na verdade, para $0 < \alpha < 1$, uma generalização direta do lema de Barbalat não é verdadeira, como é mostrado na próxima proposição.

Proposição 3.1. *Se $0 < \alpha < 1$, existe uma função f não negativa uniformemente contínua tal que $I^{\alpha}_{0+}f(t) < M$, com M uma constante positiva, mas f não converge para zero quando t vai para o infinito [2].*

A demonstração da proposição utiliza o seguinte lema:

Lema 3.1. *Se f é uma função limitada que se anula para todo $t > T$, então $I^{\alpha}_{0+}f \to 0$. Além disso, $I^{\alpha}_{0+}f$ será uma função uniformemente contínua [2].*

A demonstração dessa propriedade pode ser consultada na referência. Aqui, apresentamos o exemplo cuja existência é garantida pela proposição.

Seja $p(t)$ uma função nula em todos os pontos, exceto no intervalos $[t_i, t_i+\delta]$, onde toma o valor 1 (pulso não periódico), com $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente divergente a ser especificada e δ um real positivo fixo a ser especificado.

Note que, para cada t e para todo $\tau < t$, $p(\tau)$ pode ser escrito como $p(\tau) = \sum_{i=1}^{n} p_i(\tau)$, onde $n = \max\{i : t \geq t_i\}$ e $p_i(t)$ é uma função que se anula fora do intervalo $[t_i, t_i+\delta]$, no qual toma o valor 1.

Para todo i, temos $I^{\alpha}_{0+}p_i(t) < C_1$, onde C_1 é uma constante positiva. De fato,

- Se $t < t_i$, então $I^{\alpha}_{0+}p_i(t) = 0$;
- Se $t \in [t_i, t_i+\delta]$, então

$$I^{\alpha}_{0+}p_i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_i}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \frac{(t-t_i)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \leq \frac{\delta^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}; \tag{11}$$

- Se $t > t_i + \delta$, então

$$I^{\alpha}_{0+}p_i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_i}^{t_i+\delta}(t-\tau)^{\alpha-1}d\tau = \frac{(t-t_i)^\alpha - (t-t_i-\delta)^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \leq I^{\alpha}_{0+}p_i(t_i+\delta) = \frac{\delta^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}, \tag{12}$$

pois $I^{\alpha}_{0+}p_i(t)$ é monótona decrescente para $t > t_i + \delta$, uma vez que, nesse caso,

$$\frac{d}{dt}[(t-t_i)^\alpha - (t-t_i-\delta)^\alpha] = \alpha[(t-t_i)^{\alpha-1} - (t-t_i-\delta)^{\alpha-1}] < 0. \tag{13}$$

Pela propriedade do Lema 3.1, para todo i, temos $I^{\alpha}_{0+}p_i(t) \to 0$. Logo, pela definição de convergência, existe T_i tal que, para todo $t > T_i$, temos $I^{\alpha}_{0+}p_i(t) < 1/i^2$.

Como $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência divergente, podemos, sem perda de generalidade, excluir termos desnecessários e redefinir a sequência de maneira recursiva de modo que $t_{i+1} > T_i$. Em particular, isso faz com que o passo máximo γ da Observação 3.1 possa tender ao infinito, o que caracteriza o contraexemplo.

Uma escolha viável seria considerar $t_{i+1} = T_i + 1$ e δ definido pela igualdade $\delta^{\alpha}\alpha^{-1}\Gamma(\alpha)^{-1} = 1$. Como $I^{\alpha}_{0+}p_{i+1}(t_{i+1}+\delta) = 1$ e $I^{\alpha}_{0+}p_{i+1}(T_{i+1}) \leq 1/(i+1)^2 \leq 1$, então $T_{i+1} \geq t_{i+1}+\delta > t_{i+1} = T_i+1$. Logo, $t_{i+1} - t_i > 1$ e $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente divergente, como esperado. Além disso, $t_{i+1} - (t_i + \delta) = T_i - (t_i + \delta) + 1 > 0$, de onde os intervalos $[t_i, t_i + \delta]$ não se sobrepõem.

Então, para qualquer $t \in \mathbb{R}^+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_{n+1} \leq t \leq t_{n+2}$. Pela linearidade do operador integral, podemos escrever

$$I^{\alpha}_{0+}p(t) = I^{\alpha}_{0+}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i(t) + p_{n+1}(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} I^{\alpha}_{0+}p_i(t) + I^{\alpha}_{0+}p_{n+1}(t). \tag{14}$$

Por construção, segue que

$$I^{\alpha}_{0+}p(t) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + I^{\alpha}_{0+}p_{n+1}(t) \leq 2 + C_1. \tag{15}$$

Assim, temos uma função p limitada, positiva, que não se anula no infinito e cuja integral fracionária permanece limitada. Agora, seja $f(t)$ uma função triangular positiva tal que, para todo $t > 0$, temos $f(t) \leq p(t)$. Por exemplo, seja f nula em todo ponto, exceto nos intervalos $[t_i, t_i+\delta/2]$, onde toma os valores $2\delta^{-1}(t-t_i)$ e nos intervalos $[t_i+\delta/2, t_i+\delta]$, onde toma os valores $2\delta^{-1}(t_i + \delta - t)$.

Então, f é uniformemente contínua (mais que isso, é Lipschitz contínua com constante $2\delta^{-1}$), é limitada, positiva, não se anula no infinito e é tal que, sendo $C > 2 + C_1$, temos

$$I^{\alpha}_{0+}f(t) \leq I^{\alpha}_{0+}p(t) < C, \tag{16}$$

para todo t. Isso completa a demonstração. □

4 O Lema de Barbalat fracionário, com condições

Como visto, não é possível generalizar o lema de Barbalat para o caso $0 < \alpha < 1$. Entretanto, o resultado é válido para $\alpha \geq 1$:

Lema 4.1. *Seja $\alpha \geq 1$ e f uma função não negativa uniformemente contínua tal que $I^{\alpha}_{0+}f(t) < M$, com M uma constante positiva. Então, f converge para zero [2].*

A demonstração se dá por contradição. Supomos que f não converge a zero. Então, existe $\varepsilon > 0$ e uma sequência divergente crescente $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $f(t_i) > \varepsilon$. Uma vez que f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $i \in \mathbb{N}$, se $|t - t_i| < \delta$, então $|f(t) - f(t_i)| \leq \varepsilon/2$. Logo, se $t \in [t_i, t_i + \delta]$, temos

$$f(t) = |f(t_i) - f(t_i) + f(t)| \geq f(t_i) - |f(t_i) - f(t)| > \varepsilon/2 \tag{17}$$

Seja $p(t)$ uma função nula em todo ponto, exceto quanto $t \in [t_i, t_i + \delta]$, onde assume o valor $\varepsilon/2$. Por definição,

$$\Gamma(\alpha)I^{\alpha}_{0+}f = \int_0^{t-1} (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau + \int_{t-1}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \tag{18}$$

Como f é uma função positiva, então

$$\Gamma(\alpha) I_{0+}^{\alpha} f \geq \int_0^{t-1} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{19}$$

Agora, para $0 \leq \tau \leq t-1$ e $\alpha \geq 1$, lembrando que $f(t) \geq p(t)$ para todo t, temos

$$\Gamma(\alpha) I_{0+}^{\alpha} f \geq \int_0^{t-1} f(\tau) d\tau \geq \int_0^{t-1} p(\tau) d\tau \geq n_t \frac{\varepsilon\delta}{2}, \tag{20}$$

onde $n_t = \max\{i : t_i + \delta \leq t-1\}$. Tomando o limite quando $t \to \infty$, obtemos

$$\Gamma(\alpha) I_{0+}^{\alpha} f(t) \geq \lim_{t\to\infty} n_t \frac{\varepsilon\delta}{2} = \infty \tag{21}$$

contradição. Portanto, f converge a zero. $\square$

Observação 4.1. *Desde que $I_{0+}^{\alpha} f$ pode ser expresso em termos de $t^{\alpha-1} * f$, onde $*$ denota o operador de convolução, o lema pode ser assim estendido: se a convolução $g * f$ é uniformemente limitada, onde g é uma função monótona crescente não negativa ($g(t) = 0$ para $t < 0$) e f é uma função positiva uniformemente contínua, então f converge a zero no infinito.*

Observamos que a Equação (20) não é válida para $0 < \alpha < 1$. Portanto, não podemos estender a demonstração para esses valores de α, o que é corroborado pela Seção anterior. No entanto, pode-se assegurar pelo menos a afirmação dada no próximo lema:

Lema 4.2. *Seja f uma função não negativa limitada tal que $I_{0+}^{\alpha} f(t) < M$, com M uma constante positiva. Então, $\liminf_{t\to\infty} f(t) = 0$ [2].*

Dentro do contexto, a demonstração é até bastante simples. Como f é limitada e não negativa, $\liminf_{t\to\infty} f(t)$ existe e é não negativo. Suponhamos, por absurdo, que $\liminf_{t\to\infty} f(t) = l > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $T_\varepsilon > 0$ tal que $f(t) > l - \varepsilon > 0$ para $t > T_\varepsilon$.

Defina a função g tal que g toma os valores de f para $t \leq T_\varepsilon$ e $g(t) = l - \varepsilon$ para $t > T_\varepsilon$. Então, dado $t > T_\varepsilon$, temos

$$I_{0+}^{\alpha} f \geq I_{0+}^{\alpha} g = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau, \tag{22}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{T_\varepsilon} (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau + (l-\varepsilon) \frac{(t-T_\varepsilon)^{\alpha}}{\alpha}, \tag{23}$$

$$\geq (l-\varepsilon) \frac{(t-T_\varepsilon)^{\alpha}}{\alpha} \to \infty, \tag{24}$$

contradição. $\square$

Recomendamos a referência [2] para um estudo extenso de resultados com hipóteses mais fortes e condições extras.

5 Aplicação

Em [6], aplicamos a teoria apresentada a um modelo SIR de ordem arbitrária com a derivada de Caputo. Um dos resultados obtidos diretamente do lema de Barbalat é o seguinte Teorema:

Teorema 5.1. *No modelo SIR fracionário dado por*

$${}^{C}D_{0+}^{\alpha} S(t) = -\beta S(t) I(t)/N, \quad {}^{C}D_{0+}^{\alpha} I(t) = \beta S(t) I(t)/N - \gamma I(t), \quad {}^{C}D_{0+}^{\alpha} R(t) = \gamma I(t), \tag{25}$$

temos

$$\liminf_{t\to\infty} I(t) = 0. \tag{26}$$

A demonstração consiste em reescrevermos a última equação como

$$I_{0+}^{\alpha}(\gamma I(t)) = R(t) - R(0). \tag{27}$$

Uma vez que S, I e R são limitados [6], segue pelo Lema 4.2 que $\liminf_{t\to\infty} I(t) = 0$. □

Os mesmos autores de [2] relembram em [7] que a teoria básica de Lyapunov requer para o funcional $L(x(t), t)$ a monotonicidade com respeito ao tempo. Uma ferramenta fundamental para provar sua monotonicidade é o sinal de sua derivada. Mais do que isso, se $L(t) = L(x(t), t)$ é monótona decrescente e limitada, então converge. Contudo, a generalização para o cálculo de ordem arbitrária não possui um correspondente simples: o sinal da derivada de ordem arbitrária não é indicativo de monotonicidade. Assim, em [7] são propostos diversos estudos sobre a teoria básica de Lyapunov, sendo uma das ferramentas utilizadas o lema de Barbalat 4.2.

6 Considerações Finais

Embora o Cálculo de ordem arbitrária seja tão antigo quanto o de ordem inteira, com origem em Leibniz, l'Hôpital e Bernoulli, sua maior expansão ocorreu apenas nas últimas décadas. Assim, é natural que muitos resultados necessitem de validação por outros pesquisadores, até que a teoria do Cálculo Fracionário se consolide como a do Cálculo clássico. Esse processo pode levar décadas, e a contribuição de cada pesquisador é importante na montagem do quebra-cabeça.

Nesse sentido, este trabalho revisa a demonstração de um lema de Barbalat fracionário, onde encontra-se uma imprecisão. Além disso, foram apresentados um contraexemplo e um resultado corrigido, o qual utiliza o limite inferior. Finalmente, demos um exemplo de utilização do lema.

Agradecimentos

Aos PPGM e PPGMC-UFJF. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

[1] R. Zhang and Y. Liu, "A new Barbalat's lemma and Lyapunov stability theorem for fractional order systems," in *2017 29th Chinese control and decision conference (CCDC)*, (Chongqing), pp. 3676–3681, IEEE, 2017.

[2] J. A. Gallegos, M. A. Duarte-Mermoud, N. Aguila-Camacho, and R. Castro-Linares, "On fractional extensions of Barbalat lemma," *Systems & Control Letters*, vol. 84, pp. 7–12, 2015.

[3] H. Jahanshahi, A. Yousefpour, J. M. Munoz-Pacheco, S. Kacar, V.-T. Pham, and F. E. Alsaadi, "A new fractional-order hyperchaotic memristor oscillator: Dynamic analysis, robust adaptive synchronization, and its application to voice encryption," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 383, p. 125310, 2020.

[4] B. Yaghooti, A. Siahi Shadbad, K. Safavi, and H. Salarieh, "Adaptive synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems using sliding mode control techniques," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 234, no. 1, pp. 3–9, 2020.

[5] J.-J. E. Slotine and W. Li, *Applied nonlinear control*, vol. 199. New Jersey: Prentice Hall Englewood Cliffs, 1991.

[6] N. Z. Monteiro, "Aplicação do Cálculo de Ordem Arbitrária à Epidemiologia," Master's thesis, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2021. Orientação de Sandro Rodrigues Mazorche.

[7] J. A. Gallegos and M. A. Duarte-Mermoud, "On the Lyapunov theory for fractional order systems," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 287, pp. 161–170, 2016.

