

Aproximação por diferenças finitas da derivada fracionária ψ -Caputo

Martha Aurora Parra Pulido¹

UNICAMP, Campinas, SP

J. Vanterler da Sousa Costa²

UFABC, Santo André, SP

E. Capelas de Oliveira³

UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. Neste trabalho, discutimos uma aproximação numérica por diferenças finitas para a derivada fracionária ψ -Caputo chamada aproximação $L1-2$ ψ -Caputo. Nesse sentido, apresentamos a definição da aproximação, o estudo do erro, um exemplo e duas aplicações a fim de elucidar o resultado investigado.

Palavras-chave. Derivada fracionária ψ -Caputo, Aproximação $L1-2$ ψ -Caputo, Fórmula $L1-2$.

1 Introdução

Nos últimos anos, o cálculo fracionário ganhou um grande desenvolvimento tanto na teoria quanto na aplicação. As derivadas fracionárias apresentam vários tipos de definições, entre as quais a derivada fracionária de Riemann–Liouville e a derivada fracionária de Caputo são duas das mais importantes em aplicações [1, 3, 10]. Outras formulações de derivadas fracionárias podem ser encontradas nos trabalhos [14–17]. A solução numérica de equações diferenciais fracionárias (EDF) é um tema que vem chamando a atenção para muitos pesquisadores ao redor do mundo, e uma das razões para isso é que EDF podem fornecer uma melhor explicação para muitos fenômenos físicos naturais e facilitar a descrição de sistemas dinâmicos [5, 12]. Por exemplo, EDF pode ser usada para caracterizar sistemas complexos relacionados à memória e propriedades hereditárias como deformação viscoelástica, difusão anômala, processamento de sinal e mercado de ações [4, 6–8]. Um desafio moderno da engenharia e da ciência, é obter modelos mais realistas e melhorar os processos [2, 5] e, como consequência, os modelos matemáticos tendem a ser mais complexos e de difícil implementação.

Motivados pelo trabalho [9] e com o objetivo de obter novas aproximações para a derivada fracionária ψ -Caputo, neste trabalho apresentamos uma nova aproximação chamada $L1-2$ ψ -Caputo.

2 Definições importantes

Nesta seção, inicialmente mostramos a definição da derivada fracionária ψ -Caputo, logo fazemos uma pequena discussão sobre a discretização do intervalo de interesse e exibimos algumas aproximações da primeira derivada de uma função, também definimos a aproximação $L1-2$ ψ -Caputo e apresentamos um estudo do erro da aproximação $L1-2$ ψ -Caputo através de um lema.

¹ra211681@ime.unicamp.br

²jose.vanterler@ufabc.edu.br

³capelas@unicamp.br

Definição 2.1. [1] *Sejam $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $I = [a, b]$ o intervalo $(-\infty \leq a < t < b \leq \infty)$, $u, \psi \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ duas funções tais que ψ é crescente e $\psi'(t) \neq 0$, para todo $x \in I$. A derivada fracionária ψ -Caputo de u de ordem α ($n < \alpha < n - 1$), dada por:*

$${}^c\mathbb{D}_a^{\alpha;\psi}u(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \psi'(\xi)(\psi(t) - \psi(\xi))^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\psi'(\xi)} \frac{d}{d\xi} \right)^n u(\xi)d\xi, \quad (1)$$

onde $n = [\alpha] + 1$ para $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $n = \alpha$ para $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma [13].

Considere uma malha uniforme com pontos t_0, t_1, \dots, t_N de um intervalo $[a, b]$, onde Δt é a amplitude de passo, $t_k = k\Delta t$ e $t_{k+1/2} = \frac{t_{k+1} + t_k}{2}$ para $0 < k \leq N$ e uma função u contínua em $[a, b]$. Será usada a notação para as aproximações centradas da primeira e segunda derivada da função u nos pontos médios e nos pontos da malha, respectivamente, dadas por:

$$\delta_t u_{k-1/2} = \frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \delta_t^2 u_k = \frac{1}{\Delta t} (\delta_t u_{k+1/2} - \delta_t u_{k-1/2}). \quad (2)$$

Por outro lado, denotamos o polinômio de interpolação de primeiro grau (linear) da função u no intervalo $[t_{j-1}, t_j]$, $1 \leq j \leq N$ [11], por

$$\Pi_{1,j}u(t) = u(t_{j-1}) \frac{(t_j - t)}{\Delta t} + u(t_j) \frac{(t - t_{j-1})}{\Delta t},$$

e, o polinômio interpolador de segundo grau (quadrático) da função u no intervalo $[t_{j-1}, t_j]$, $1 \leq j \leq N$, na seguinte forma

$$\begin{aligned} \Pi_{2,j}u(t) &= u(t_{j-2}) \frac{(t - t_{j-1})(t - t_j)}{2\Delta t^2} + u(t_{j-1}) \frac{(t - t_{j-2})(t_j - t)}{\Delta t^2} + u(t_j) \frac{(t - t_{j-1})(t - t_{j-2})}{2\Delta t^2} \\ &= \Pi_{1,j}u(t) + \frac{1}{2}(\delta_t^2 u_{j-1})(t - t_{j-1})(t - t_j). \end{aligned}$$

Note que, para as primeiras derivada temos

$$(\Pi_{1,j}u(t))' = \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{\Delta t} = \delta_t u_{j-1/2}, \quad (3)$$

e,

$$(\Pi_{2,j}u(t))' = \delta_t u_{j-1/2} + (\delta_t^2 u_{j-1})(t - t_{j-1/2}). \quad (4)$$

A definição a seguir, surge da discretização da derivada ψ -Caputo (Eq.(1)) nos pontos da malha t_0, t_1, \dots, t_N de um intervalo $[a, b]$ com $n = 1$, onde no primeiro intervalo $[t_0, t_1]$ usamos a aproximação por diferenças finitas dada pela Eq.(3) e nos demais intervalos usamos a aproximação por diferenças finitas dada pela Eq.(4) para aproximar $u'(\xi)$.

Definição 2.2 (Aproximação $L1 - 2 \psi$ -Caputo). *Sejam $0 < \alpha < 1$, $I = [a, b]$, $u \in C^3(I, \mathbb{R})$ e $\psi \in C^2(I, \mathbb{R})$ duas funções tais que ψ é crescente e $\psi'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Considere uma malha uniforme de pontos t_0, t_1, \dots, t_N do intervalo I , tal que $t_0 = a$, $t_k = k\Delta t$ para $0 < k \leq N$, onde Δt é a amplitude de passo. A aproximação $L1-2 \psi$ -Caputo da derivada fracionária ψ -Caputo*

de u de ordem α , é dada por:

$$\begin{aligned} {}^c\mathbb{D}_{t_0}^{\alpha;\psi} u(t) \Big|_{t=t_k} &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^k \frac{\delta_t u_{j-1/2}}{\delta_t \psi_{j-1/2}} [(\psi(t_k) - \psi(t_{j-1}))^{1-\alpha} - (\psi(t_k) - \psi(t_j))^{1-\alpha}] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=2}^k \frac{\delta_t^2 u_{j-1}}{2\delta_t \psi_{j-1/2}} [(\psi(t_k) - \psi(t_{j-1}))^{1-\alpha} + (\psi(t_k) - \psi(t_j))^{1-\alpha}] \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=2}^k \frac{\delta_t^2 u_{j-1}}{(\delta_t \psi_{j-1/2})^2} [(\psi(t_k) - \psi(t_{j-1}))^{2-\alpha} - (\psi(t_k) - \psi(t_j))^{2-\alpha}]. \end{aligned} \quad (5)$$

Dada a aproximação $L1-2$ ψ -Caputo no ponto t_k e a derivada ψ -Caputo discretizada no ponto t_k , chamaremos erro pontual, isto é, o erro no ponto t_k , como sendo

$$|e_k| = \left| {}^c\mathbb{D}_{t_0}^{\alpha;\psi} u(t) \Big|_{t=t_k} - {}^c\mathbb{D}_{t_0}^{\alpha;\psi} u(t) \Big|_{t=t_k} \right|. \quad (6)$$

Lema 2.1. *Sejam $0 < \alpha < 1$, $I = [a, b]$, $u \in C^3(I, \mathbb{R})$ e $\psi \in C^2(I, \mathbb{R})$ duas funções tal que ψ é crescente e $\psi'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Sejam a aproximação $L1-2$ ψ -Caputo e a derivada ψ -Caputo discretizadas nos pontos da malha t_0, t_1, \dots, t_N e o erro pontual como na Eq.(6), temos*

$$\begin{aligned} |e_1| &\leq \frac{M}{\Gamma(2-\alpha)} \left| \frac{u''(\varepsilon)}{2} - \frac{\psi''(\eta)\delta_t u_{1/2}}{2\delta_t \psi_{1/2}} \right| (\psi(t_1) - \psi(t_0))^{1-\alpha}, \\ |e_k| &\leq \frac{M}{\Gamma(2-\alpha)} \left| \frac{u''(\varepsilon)}{2} - \frac{\psi''(\eta)\delta_t u_{1/2}}{2\delta_t \psi_{1/2}} \right| (\psi(t_k) - \psi(t_0))^{1-\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{|u'''(\varepsilon)|\Delta t^3}{12} + \frac{|M_1|\Delta t^2}{4} + \frac{|M_2|\Delta t^3}{6} \right) (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^{-\alpha} \\ &\quad + \frac{|M_3|}{\Gamma(1-\alpha)} (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^{1-\alpha} + \frac{|M_4|\Delta t^2}{4\Gamma(2-\alpha)} (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^{1-\alpha} \\ &\quad + \frac{|M_5|}{\Gamma(3-\alpha)} (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^{2-\alpha}, \quad 2 \leq k \leq N, \end{aligned}$$

onde $M = \left| \max_{t_0 \leq \zeta \leq t_1} \left\{ \frac{2\zeta - t_0 - t_1}{\psi'(\zeta)} \right\} \right|$, $M_1 = \max_{t_1 \leq j \leq t_{k-1}} \left\{ \frac{\psi''(\hat{\eta}_j)\delta_t u_{j-1/2}}{2\delta_t \psi_{j-1/2}} \right\}$,
 $M_2 = \max_{t_1 \leq j \leq t_{k-1}} \left\{ \frac{\psi''(\hat{\eta}_j)\delta_t^2 u_{j-1}}{4\delta_t \psi_{j-1/2}} \right\}$, $M_3 = \frac{u'''(\hat{\varepsilon}_k)\mathcal{C}_1}{6} - \frac{\psi''(\hat{\eta}_k)\delta_t u_{k-1/2}\mathcal{C}_2}{2\delta_t \psi_{k-1/2}} - \frac{\psi''(\hat{\eta}_k)\delta_t^2 u_{k-1}\mathcal{C}_3}{4\delta_t \psi_{k-1/2}}$,
 $M_4 = \max_{t_1 \leq j \leq t_{k-1}} \left\{ \frac{\psi''(\hat{\eta}_j)\delta_t^2 u_{j-1/2}}{2(\delta_t \psi_{j-1/2})^2} \right\}$, $M_5 = \frac{\delta_t^2 u_{k-1}\psi''(\hat{\eta}_k)\mathcal{C}_2}{2(\delta_t \psi_{k-1/2})^2}$,
 $\mathcal{C}_1 = \left| \max_{t_{k-1} \leq \zeta \leq t_k} \left\{ \frac{((\zeta - t_{k-2})(\zeta - t_{k-1})(\zeta - t_k))'}{\psi'(\zeta)} \right\} \right|$,
 $\mathcal{C}_2 = \left| \max_{t_{k-1} \leq \zeta \leq t_k} \left\{ \frac{(2\zeta - t_{k-1} - t_k)}{\psi'(\zeta)} \right\} \right|$, $\mathcal{C}_3 = \left| \max_{t_{k-1} \leq \zeta \leq t_k} \left\{ \frac{(2\zeta - t_{k-1} - t_k)^2}{\psi'(\zeta)} \right\} \right|$, $\varepsilon, \eta \in (t_0, t_1)$, $\varepsilon \in (t_0, t_{k-1})$, $\hat{\eta}_j \in (t_{j-1}, t_j)$, $\hat{\varepsilon}_k \in (t_{k-2}, t_k)$, $\hat{\eta}_k \in (t_{k-1}, t_k)$.

No lema anterior, no caso em que a função $\psi(t) = t$ é obtida a mesma ordem de convergência apresentada em [9], isto é $3 - \alpha$.

2.1 Um caso particular da derivada ψ -Caputo

A fim de exemplificarmos, consideramos um caso particular da derivada ψ -Caputo, isto é, vamos calcular a derivada ψ -Caputo de ordem α da função $u(t) = e^{2t}$, com $\psi(t) = t$, $0 < t \leq 1$, usando a

Definição 2.2. Veja que a solução analítica é dada por

$${}^c\mathbb{D}_0^{\alpha;t}u(t) = 2t^{1-\alpha}\mathbb{E}_{1,2-\alpha}(2t),$$

onde $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(\cdot)$ é uma Mittag-Leffler com dois parâmetros [18].

Na Figura 1, são apresentados os resultados numéricos obtidos da solução com $\alpha = 0.9$ e dois espaçamentos de malha dados por $\Delta t = 1/10$ e $\Delta t = 1/80$. Por outro lado, na Tabela 1 é apresentado um estudo do erro da aproximação com respeito à derivada exata em diferentes normas, isto é, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$, é importante observar que para o cálculo das normas foi usado o erro pontual e no caso deste exemplo $u(x)$ é conhecida.

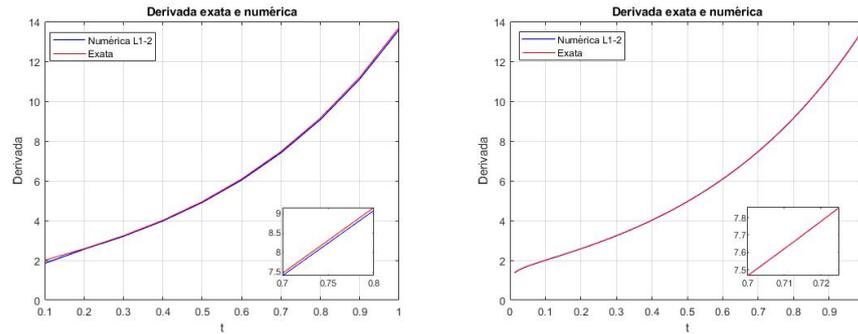


Figura 1: Derivadas exata e aproximada com $\alpha = 0.9$ para $\Delta t = 1/10$ (esquerda) e $\Delta t = 1/80$ (direita).

Tabela 1: Erro e taxa de convergência

$\alpha = 0.9$						
Δt	Erro $\ \cdot\ _1$	T. Conv.	Erro $\ \cdot\ _2$	T. Conv.	Erro $\ \cdot\ _\infty$	T. Conv.
0.10000	6.83855e-01	1.04313	2.50788e-01	1.43292	1.55792e-01	1.88889
0.05000	3.26045e-01	1.06862	9.53987e-02	1.39443	6.80440e-02	1.99037
0.02500	1.53888e-01	1.08319	3.80231e-02	1.32709	3.07210e-02	2.04375
0.01250	7.22356e-02	1.09110	1.59474e-02	1.25356	1.40998e-02	2.07129
0.00625	3.38088e-02	1.09531	6.97576e-03	1.19290	6.52442e-03	2.08538
0.00313	1.57994e-02	1.09753	3.13937e-03	1.15188	3.03139e-03	2.09255
0.00156	7.37731e-03	1.09870	1.43687e-03	1.12755	1.41132e-03	2.09621
0.00078	3.44327e-03	1.09932	6.63749e-04	1.11422	6.57733e-04	2.09807

3 Aplicações

Nesta seção, apresentamos duas aplicações usando aproximação por diferenças finitas $L1-2$ ψ -Caputo, observando que, para este propósito é preciso reescrever a Eq.(5) como segue

$${}^c\mathbb{D}_{t_0}^{\alpha;\psi}u(t)\Big|_{t=t_k} = \frac{1}{\Delta t^2\Gamma(2-\alpha)} \left[\sum_{j=1}^k \Delta t a_{k,j}(u_j - u_{j-1}) + \sum_{j=2}^k b_{k,j}(u_j - 2u_{j-1} + u_{j-2}) \right] \quad (7)$$

onde, $a_{k,j} = \frac{(\psi_k - \psi_{j-1})^{1-\alpha} - (\psi_k - \psi_j)^{1-\alpha}}{\delta_t \psi_{j-1/2}}$, $b_{k,j} = \frac{(\psi_k - \psi_{j-1})^{2-\alpha} - (\psi_k - \psi_j)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(\delta_t \psi_{j-1/2})^2} - \frac{\Delta t((\psi_k - \psi_{j-1})^{1-\alpha} + (\psi_k - \psi_j)^{1-\alpha})}{2\delta_t \psi_{j-1/2}}$ e $\psi_j = \psi(t_j)$ e $u_j \approx u(t_j)$, para obter um sistema de equações lineares com k -equações e k -incógnitas. As escolhas feitas para a função $\psi(t)$ são motivadas dos casos particulares da derivada

fracionária ψ -Caputo conhecidas como: derivada fracionária de Caputo, Katugampola e Hadamard [14].

Aplicação 3.1. Encontrar $u(t)$ tal que

$$\begin{cases} {}^c\mathbb{D}_0^{\alpha;t^\rho} u(t) = \frac{\Gamma(\frac{4+\alpha}{\rho})}{\Gamma(\frac{\rho(1-\alpha)+4+\alpha}{\rho})} t^{4+\alpha(1-\rho)}, & t \in [0, 1], \alpha \in (0, 1) \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

usando a **Definição 2.2**. A solução exata é $u(t) = t^{4+\alpha}$.

Na Figura 2, são apresentados os resultados numéricos obtidos para a **Aplicação 3.1** com $\alpha = 0.7$, $\rho = 0.8$ e espaçamentos $\Delta t = 1/10$ e $\Delta t = 1/80$. Na Tabela 2, é considerada a análise do erro e a taxa de convergência nas diferentes normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$.

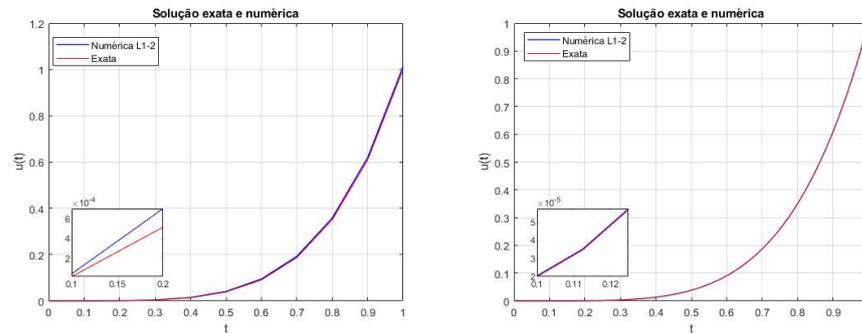


Figura 2: Soluções exata e numérica da **Aplicação 3.1** com $\rho = 0.8$, $\alpha = 0.7$, onde os espaçamentos de malha são $\Delta t = 1/10$ (esquerda) e $\Delta t = 1/80$ (direita).

Tabela 2: Erro e taxa de convergência da **Aplicação 3.1**

$\alpha = 0.7, \rho = 0.8$						
$h = \Delta t$	Erro $\ \cdot\ _1$	T. Conv.	Erro $\ \cdot\ _2$	T. Conv.	Erro $\ \cdot\ _\infty$	T. Conv.
0.10000	8.06843e-02	1.10547	3.68030e-02	1.56848	2.56394e-02	1.38191
0.05000	3.97333e-02	1.02194	1.29857e-02	1.50290	6.90778e-03	1.67667
0.02500	2.11786e-02	0.90774	4.96918e-03	1.38584	1.97221e-03	1.70654
0.01250	1.25303e-02	0.75718	2.11549e-03	1.23202	6.18012e-04	1.62244
0.00625	8.24513e-03	0.60381	9.99973e-04	1.08103	2.12460e-04	1.51336
0.00313	5.90742e-03	0.48101	5.12444e-04	0.96449	7.83554e-05	1.42489
0.00156	4.47841e-03	0.39954	2.76648e-04	0.88935	3.02122e-05	1.36756
0.00078	3.50887e-03	0.35198	1.53875e-04	0.84629	1.19462e-05	1.33484

Aplicação 3.2. Encontrar $u(x, t)$ tal que

$$\begin{cases} {}^c\mathbb{D}_{\Delta t}^{\alpha;\ln(t)} u(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + e^x \left(2t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^{\alpha-1} (2t)^k}{k!} - e^{2t} \right), & x \in (0, 1), \quad t \in (\Delta t, 1] \\ u(0, t) = e^{2t}, \quad u(1, t) = e^{1+2t}, & t \in (\Delta t, 1], \quad \alpha \in (0, 1) \\ u(x, \Delta t) = e^{x+2\Delta t}, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

usando a **Definição 2.2** para discretizar o tempo e a Eq.(2) para discretizar o espaço. Note que, a solução exata do problema é dada por $u(x, t) = e^x t^{4+\alpha}$.

Na Figura 3 são apresentados os resultados numéricos obtidos quando usamos a **Definição 2.2** para resolver a **Aplicação 3.2** com $\alpha = 0.7$ e os mesmos espaçamentos de malha usados na aplicação anterior. Na Tabela 3 apresentamos o estudo do erro e a taxa de convergência.

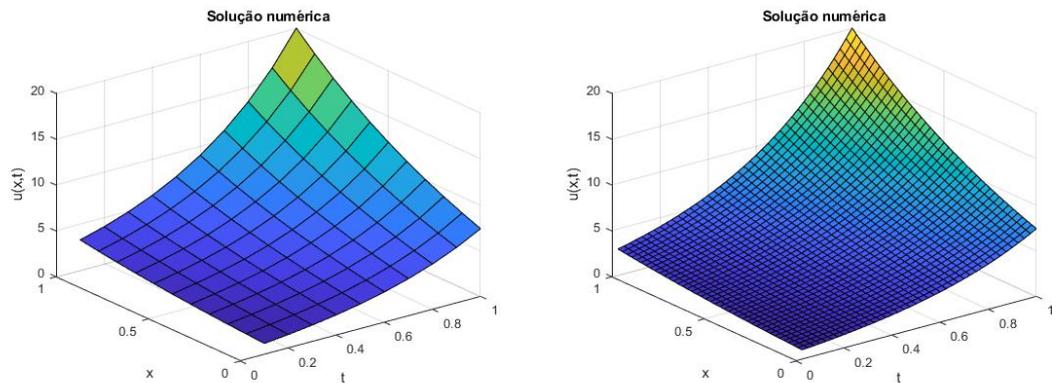


Figura 3: Solução numérica da **Aplicação 3.2** para $\alpha = 0.4$ e $\Delta t = 1/10$ (esquerda) e $\Delta t = 1/80$ (direita).

Tabela 3: Erro e taxa de convergência da **Aplicação 3.2**

$\alpha = 0.4$						
$h = \Delta t$	Erro $\ \cdot\ _1$	T. Conv.	Erro $\ \cdot\ _2$	T. Conv.	Erro $\ \cdot\ _\infty$	T. Conv.
0.10000	1.87181e-02	1.25758	6.24775e-02	0.84417	2.81661e-01	0.29546
0.05000	7.96055e-03	1.23349	3.65850e-02	0.77208	2.39606e-01	0.23330
0.02500	3.46385e-03	1.20049	2.22528e-02	0.71727	2.08179e-01	0.20284
0.01250	1.53866e-03	1.17070	1.39079e-02	0.67808	1.84919e-01	0.17093
0.00625	6.95963e-04	1.14460	8.87380e-03	0.64828	1.67313e-01	0.14435

4 Considerações finais

Foi possível observar, que a ordem de convergência no caso em que $\psi(t) = t$ é $3 - \alpha$ na norma $\|\cdot\|_\infty$, como esperado por [9]; sendo este o melhor dos casos, pois o erro ao trabalharmos sobre a função ψ é nulo, coisa que difere nos outros casos. Em geral, observando as figuras e as tabelas de análise de erro e taxa de convergência podemos dizer que a aproximação $L1-2$ ψ -Caputo fornece um esquema numérico que consegue aproximar de forma eficiente a solução exata de problemas de valor inicial no caso temporal e problemas com equações de sub-difusão fracionárias no caso espaço-tempo, para as três escolhas da função $\psi(t)$ apresentadas.

Agradecimentos

Martha Aurora Parra Pulido agradece ao processo nº 140784/2020-9, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Referências

- [1] R. Almeida. “A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function”. Em: **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 44 (2017), pp. 460–481.
- [2] R. Almeida e N. R. O. Bastos. “A numerical method to solve higher-order fractional differential equations”. Em: **Mediterr. J. Math.** 13.3 (2016), pp. 1339–1352.
- [3] A. K. Anatoly. “Hadamard-type fractional calculus”. Em: **Journal of the Korean Mathematical Society** 38.6 (2001), pp. 1191–1204.
- [4] A. Anguraj, S. Kanjanadevi e J. J. Nieto. “Mild solutions of Riemann-Liouville fractional differential equations with fractional impulses”. Em: **Nonlinear Anal.: Modell. Control** 22.6 (2017), pp. 753–764.
- [5] Y. Chen, X. Ke e Y. Wei. “Numerical algorithm to solve system of nonlinear fractional differential equations based on wavelets method and the error analysis”. Em: **Appl. Math. Comput.** 251 (2015), pp. 475–488.
- [6] M. Duarte O. e J. A Tenreiro M. “Fractional signal processing and applications”. Em: **Signal processing** 83.11 (2003).
- [7] S. Erokhin e O. Roshka. “Supplement of differential equations of fraction order for forecasting of financial markets”. Em: **MATEC Web of Conferences**. Vol. 170. EDP Sciences. 2018, p. 01075.
- [8] L. R. Evangelista e E. K. Lenzi. **Fractional diffusion equations and anomalous diffusion**. Cambridge University Press, 2018.
- [9] G. H. Gao, Z. Z Sun e H. W. Zhang. “A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications”. Em: **Journal of Computational Physics** 259 (2014), pp. 33–50.
- [10] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava e J. J. Trujillo. **Theory and applications of fractional differential equations**. Vol. 204. elsevier, 2006.
- [11] R. J. LeVeque. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems**. SIAM, 2007.
- [12] E. M. Mendes, G. H. O. Salgado e L. A. Aguirre. “Numerical solution of Caputo fractional differential equations with infinity memory effect at initial condition”. Em: **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.** 69 (2019), pp. 237–247.
- [13] I. Podlubny. “Fractional differential equations”. Em: **Mathematics in science and engineering** 198 (1999), pp. 41–119.
- [14] G. S. Teodoro. “Derivadas Fracionárias: Tipos e Critérios de Validade”. Tese de doutorado. Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, Campinas, 2019.
- [15] J. Vanterler da C. Sousa e E. Capelas De Oliveira. “Leibniz type rule: ψ -Hilfer fractional operator”. Em: **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.** 77 (2019), pp. 305–311.
- [16] J. Vanterler da C. Sousa e E. Capelas De Oliveira. “On the Ψ -fractional integral and applications”. Em: **Comput. Appl. Math.** 38.1 (2019), pp. 1–22.
- [17] J. Vanterler da C. Sousa e E. Capelas De Oliveira. “On the ψ -Hilfer fractional derivative”. Em: **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.** 60 (2018), pp. 72–91.
- [18] A. Wiman. “Über den fundamental satz in der theorie der Funktionen $E_\alpha(z)$ ”. Em: **Acta Math** 29.1 (1905), pp. 191–201.