

Um Método de Volumes Finitos com Estratégia de Interpolação que Preserva Linearidade

Matheus A.Chaves¹

NT-CAA/UFPE, Caruaru,PE

Fernando R. L. Contreras²

NT-CAA/UFPE, Caruaru,PE

Os processos de difusão baseados em leis de conservação estão presentes em diversas aplicações da engenharia: a propagação de calor, o escoamento de fluidos em reservatórios de petróleo ou ainda a simulação de águas subterrâneas em aquíferos. Esses fenômenos físicos são matematicamente descritos por equações que possuem um operador elíptico com um chamado coeficiente de difusão, que pode ser, em geral, descontínuo e representado por um tensor que geralmente pode apresentar uma alta razão de anisotropia.

A solução analítica destas equações muitas vezes pode não existir, devido à complexidade dos parâmetros físicos que se encontram nas equações governantes. Nesse sentido, a empregabilidade dos métodos numéricos mais sofisticados nas soluções das equações é plausivelmente justificada [1]. De acordo com [3][6][5], um método numérico ideal para a discretização do operador elíptico, como a equação de pressão, deveria atender, pelo menos, os seguintes critérios: ser localmente conservativo, manter soluções positivas ao atender o Princípio do Máximo Discreto (DMP) e preservar a linearidade.

Assim, a modelagem dos processos de difusão requer métodos numéricos cada vez mais sofisticados e robustos, que sejam capazes de representar adequadamente os fenômenos físicos naturais estudados. Neste caso, modela-se numericamente a distribuição dos campos de pressão de reservatórios de petróleo ou aquíferos. Neste trabalho, utiliza-se a metodologia de [4], onde as variáveis primárias (incógnitas ou solução numérica) são localizadas nos centros das células, enquanto as variáveis auxiliares podem estar situadas nos vértices e/ou nas faces da malha computacional. De acordo com o proposto em [2], a escolha da localização dos pontos de interpolação vai influenciar no estêncil do método numérico e, portanto, na sua acurácia e robustez.

As variáveis auxiliares devem ser interpoladas em função das variáveis primárias centradas na célula. Esse processo de interpolação será objeto de estudo no presente trabalho. Então, pretende-se explorar as diferentes estratégias de interpolação existentes e a partir delas adotar novas metodologias de interpolação que ajudem a melhorar a robustez e acurácia dos métodos numéricos propostos por [3]. Nesse contexto, baseado em [7], utilizamos um método de interpolação que preserva a linearidade e melhora o método LPEW2 existente proposto por [8], onde para se calcular os pesos de interpolação não é necessário a resolução de sistema lineares locais. Sabe-se que o método LPEW2 possui uma acurácia de segunda de ordem e é bastante robusto, mesmo para meios anisotrópicos e malhas ligeiramente distorcidas. Uma das desvantagens desta estratégia é que os pesos de interpolação podem ser negativos e a generalização para dimensão 3 (3D) não é recomendável, já que os pesos de interpolação dependem muito de funções trigonométricas.

Então, propõe-se um esquema eLPEW2 (enriched LPEW2) que detém tanto variáveis centradas na célula quanto variáveis nos vértices. Nessa abordagem, define-se o tensor de difusão em uma

¹matheus.araujochaves@ufpe.br

²fernando.raul@ufpe.br

região de domínio triangular formada em três pontos: um centro de célula e pontos em duas arestas que compartilham esse centro. A partir disso, a derivação das formulações é sujeita ao critério de preservação da linearidade, ou seja, cada passo da derivação é exato sempre que a solução é linear por partes e o tensor de difusão é constante por partes. Uma das vantagens empregadas nessa metodologia é apenas o uso de coeficientes ligados a geometria do problema e não aos parâmetros livres envolvidos. Essa abordagem melhora o desempenho numérico e sua derivação revela que o método tem a possibilidade de ser estendido para o caso 3D.

A validação do método numérico se dá através da resolução de diversos problemas “benchmarks” pertinentes na literatura, onde é possível analisar a determinada influência da estratégia de interpolação na acurácia e robustez do método de volumes finitos. Ao realizar os testes complementares, verificamos, por exemplo, a simplicidade da implementação computacional e preservação da linearidade em meios heterogêneos anisotrópicos. Além disso, verificamos também que para casos mais simples, o eLPEW2 recai no LPEW2. Constatamos que quanto maior o grau de anisotropia, existe uma relativa diferença na taxa de convergência dos métodos.

Agradecimentos

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo a Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE).

Referências

- [1] CARVALHO D. K. E. de. “Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de Dados por Aresta para a Simulação de Escoamentos em Meios Porosos”. Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), 2005.
- [2] CONTRERAS F. R. L. “Métodos de volumes finitos robustos para a simulação de escoamentos bifásicos de água e óleo em reservatórios de petróleo”. Tese de doutorado. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), 2016.
- [3] CONTRERAS F. R. L., LYRA P. R. e CARVALHO D. K. E. de. “A new multipoint flux approximation method with a quasi-local stencil (MPFA-QL) for the simulation of diffusion problems in anisotropic and heterogeneous media”. Em: **Applied Mathematical Modelling** 70 (2019), pp. 659–676.
- [4] YUAN G. e SHENG Z. “Monotone finite volume schemes for diffusion equations on polygonal meshes”. Em: **Journal of Computational Physics** 227 (2008), pp. 6288–6312.
- [5] LIPNIKOV K. et al. “Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes”. Em: **Journal of Computational Physics** 227 (2007), pp. 492–512.
- [6] EWING R. R. **The mathematics of reservoir simulation**. SIAM, 1983.
- [7] MIAO S. e WU J. “A nonlinear correction scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion problems on polygonal meshes”. Em: **Journal of Computational Physics** 448 (2022). DOI: 10.1016/j.jcp.2021.110729.
- [8] GAO Z. e WU J. “A linearity-preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes”. Em: **International Journal for Numerical Methods in Fluids** 12 (2019). Wiley Online Library, v. 67, pp. 2157–2183.