Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Conexões entre Constelações de Sinais, Equações Fuchsianas e Geometria Hiperbólica

Mariana G. Gusmão [1]
PPGEAB/UNIFAL-MG, Alfenas, MG
Anderson José de Oliveira [2]
DEMAT/UNIFAL-MG, Alfenas, MG

A teoria dos códigos corretores de erros, a geometria hiperbólica e as equações diferenciais fuchsianas são áreas em franca expansão e seu estudo permite diversas possibilidades de aplicação, como no processo de transmissão da informação em sistemas de comunicação.

As equações diferenciais fuchsianas apresentam como principal característica o fato de que todo ponto singular no plano complexo estendido é regular. Podemos classificá-las como equações hipergeométricas, de Legendre, de Tchebychev, com três pontos singulares regulares e de Heun, com quatro pontos singulares regulares. As equações fuchsianas possuem algumas propriedades de transformação que facilitam sua análise [1].

Em [2], é realizada a definição de novas métricas sobre espaços de sinais bidimensionais derivados da Teoria de Grafos sobre constelações em uma modulação QAM (Quadrature Amplitude Modulation) e de uma subclasse dos códigos geometricamente uniformes, chamada de códigos perfeitos, sobre anéis quociente de inteiros Gaussianos, onde pontos complexos geram as constelações de sinais e o código.

A geometria hiperbólica é um tipo de geometria não-euclidiana que satisfaz os quatro primeiros axiomas da geometria euclidiana, mas não satisfaz o quinto. Essa geometria surge então da negação do quinto postulado de Euclides. Ao longo dos séculos surgiram diversos enunciados equivalentes ao 5^o postulado de Euclides e o mais popular deles foi feito por John Fairplay $(1748-1819)$ que afirma que, "Por um ponto não contido em uma reta dada, pode ser traçada uma e apenas uma reta paralela a reta dada", conhecido como Postulado das Paralelas, [4].

Em [3] é apresentada a conexão entre equações diferenciais fuchsianas e geometria hiperbólica, a fim de analisar sistemas de comunicação.

Neste trabalho buscamos estabelecer conexões entre singularidades de uma equação diferencial fuchsiana, tomadas como geradores de constelações de sinais, além de relacionar esses resultados com vértices de polígonos hiperbólicos.

Considere pontos singulares regulares de uma equação diferencial fuchsiana que também gerem uma constelação de sinais no plano complexo, a saber $3+4i$ e $-3+4i$. A partir da constelação de sinais, foi possível analisar a existência de um código perfeito e a capacidade de correção de erros, onde cada palavra código foi capaz de corrigir todos os padrões com um erro. Além disso, dados os três pontos singulares, sendo um deles o infinito e os outros dois pontos opostos em relação ao eixo imaginário, apresentamos um triângulo hiperbólico no semiplano superior e no disco de Poincaré e analisamos o gênero da superfície associada, sendo gênero 0 e consequentemente a superfície associada é a esfera .

[1]mariana.gusmao@sou.unifal-mg.edu.br
[2]anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br

Observe que ao tomarmos pontos simétricos em relação ao eixo imaginário para a geração das constelações de sinais, obtém-se a mesma constelação, porém o código perfeito é formado pelos pontos conjugados.

A Figura 1 a seguir apresenta as conexões estabelecidas no objetivo deste trabalho.

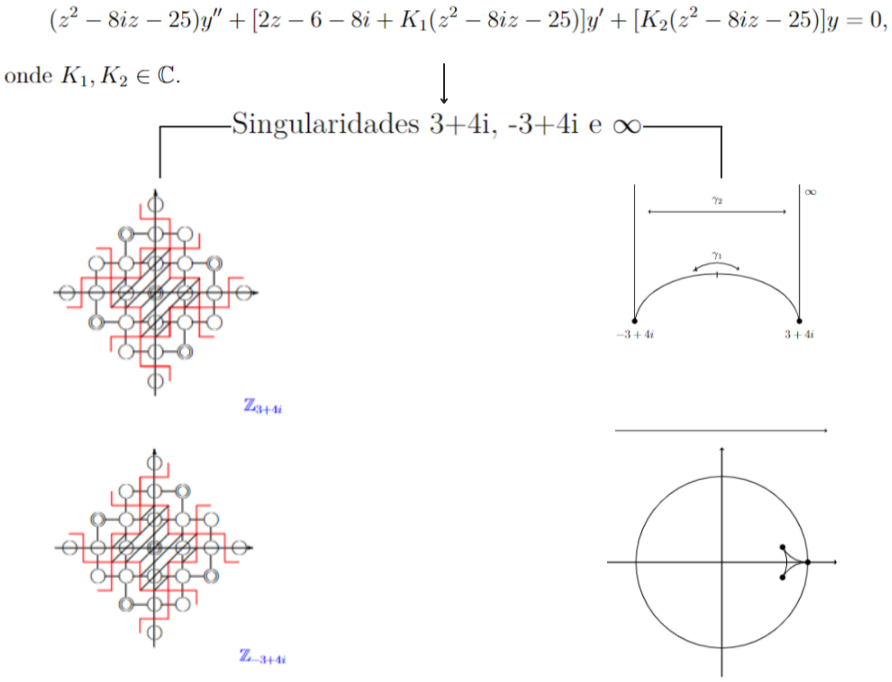

Figura 1: Singularidades $3 + 4i$, $-3 + 4i$ e ∞ de uma equação diferencial fuchsiana como geradores de constelações de sinais e triângulos hiperbólicos.

Agradecimentos

À Universidade Federal de Alfenas pelo apoio financeiro.

Referências

[1] G. Kristensson. **Second order differential equations. Special functions and their classification**. New York: Springer, 2010. ISBN: 9781441970190.

[2] C. Martinez, R. Beivide e E. Gabidulin. “Perfect Codes for Metrics Induced by Circulant Graphs”. Em: **IEEE Transactions on Information Theory** 53.9 (2007), pp. 3042–3052. DOI: 10.1109/TIT.2007.903126.

[3] A. Oliveira e R. Palazzo. “Uniformização de Curvas Algébricas Planares via EDOs Fuchsianas no Estudo de Sistemas de Comunicação”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**. 2018. DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0456.

[4] C. Walkden. **Hyperbolic Geometry.** Manchester, Manchester University. 2019.

