

## Elementos Finitos Curvos 2D na análise de deformação em chapas

Carlos Roberto A. Barcellos<sup>1</sup>

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais – Propemm, IFES, Vitória, ES  
Gustavo A. Lima<sup>2</sup>

Engenharia Mecânica, IFES, São Mateus, ES

Werley G. Facco<sup>3</sup>

Coordenadoria de Formação Geral, IFES, São Mateus, ES

Alex S. Moura<sup>4</sup>

Departamento de Economia, UFJF, Governador Valadares, MG

Estéfano A. Vieira<sup>5</sup>

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais – Propemm, IFES, Vitória, ES

Em geral, o Método de Elementos Finitos (MEF) faz aproximações do domínio computacional do problema ao representar contornos não lineares, o que gera erro geométrico [3]. O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de mapeamento entre o elemento finito físico e o de referência mais adequado a regiões onde tem-se fronteiras definidas por curvas suaves.

Para o cálculo das integrais do MEF, foram considerados dois mapeamentos (Fig. 1). O mapeamento linear  $\psi$  (Equação 1) mapeia respectivamente os pontos  $P_0(x_0, y_0)$ ,  $P(x_a, y_a)$  e  $P_b(x_b, y_b)$  do elemento físico nos pontos  $P'_0(0, 0)$ ,  $P'_a(1, 0)$  e  $P'_b(0, 1)$  em um sistema de coordenadas intermediário.

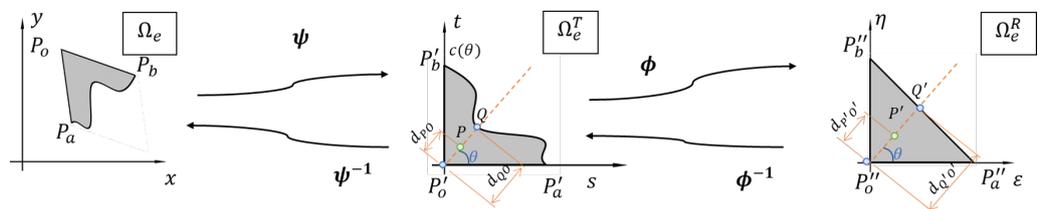


Figura 1: Mapeamentos entre o elemento físico ( $\Omega_e$ ), intermediário ( $\Omega_e^T$ ) e de referência ( $\Omega_e^R$ ).

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\alpha} \left\{ \begin{bmatrix} y_b - y_o & x_o - x_b \\ y_o - y_a & x_a - x_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_o(y_o - y_b) - y_o(x_b - x_o) \\ x_o(y_a - y_o) - y_o(x_a - x_o) \end{bmatrix} \right\} \quad (1)$$

em que  $\alpha = (x_a - x_o)(y_b - y_o) - (x_b - x_o)(y_a - y_o)$ .

O mapeamento  $\phi$  mapeia  $\Omega_e^T$  no elemento de referência triangular ( $\Omega_e^R$ ), e depende apenas da descrição do contorno curvo de  $\Omega_e^T$ , em que  $c(\theta)$  representa o raio em função do ângulo. Dado um ponto  $P \in \Omega_e^T$ , obtém-se o ponto  $Q$ , interseção da reta  $\overleftrightarrow{P'_0P}$  com a região curva. O ponto  $Q$  é

<sup>1</sup>barcello@gmail.com

<sup>2</sup>2001gustavoalves@gmail.com

<sup>3</sup>werleyfacco@ifes.edu.br

<sup>4</sup>alexsmoura100@gmail.com

<sup>5</sup>estefanovieira@gmail.com

mapeado em  $Q'$ , de modo que  $\widehat{QP'_oP'_a} = \widehat{Q'P''_oP''_a}$  e  $Q'$  pertença à fronteira oblíqua de  $\Omega_e^R$ . O ponto  $P'$  é obtido de modo que  $\widehat{PP'_oP'_a} = \widehat{P'P''_oP''_a}$  e as distâncias identificadas na Fig. 1 satisfaçam a Equação 2. Realizando tais cálculos, encontra-se a Equação 3. Dessa forma, pode-se definir os pontos e nós de Gauss e as funções de forma polinomiais em  $\Omega_e^R$  e mapeá-los em  $\Omega_e$ .

$$\frac{d_{PO}}{d_{QO}} = \frac{d_{P'O}}{d_{Q'O}} \quad (2)$$

$$\phi(s, t) = \begin{bmatrix} s \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{c(\theta) \cdot (s+t)} \\ t \frac{\sqrt{s^2+t^2}}{c(\theta) \cdot (s+t)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Fez-se a análise de deformações em uma chapa tensionada, cuja formulação matemática encontra-se em [2]. A equação  $c(\theta)$  foi obtida aproximando a região curva em segmentos de circunferência a partir de 1, 2 e 3 pontos coletados da fronteira curva. O domínio computacional é uma chapa quadrada com um furo central de contorno irregular. Avaliou-se o erro conforme refinamento de malha. As soluções foram comparadas com a obtida usando o MEF com elementos triangulares.

A convergência da simulação pode ser observada na Fig. 2, em que  $\sqrt{n}$  é a raiz quadrada do número de nós da malha. Os resultados obtidos mostraram que, para uma mesma malha, o erro obtido pelo MEF com a proposta de elemento curvo no cálculo dos deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$  foi, respectivamente, até 35,69% e 39,99% menor do que o encontrado na simulação não adaptada. O erro calculado foi o erro relativo da norma  $L_2(\Omega)$ , conforme [1].

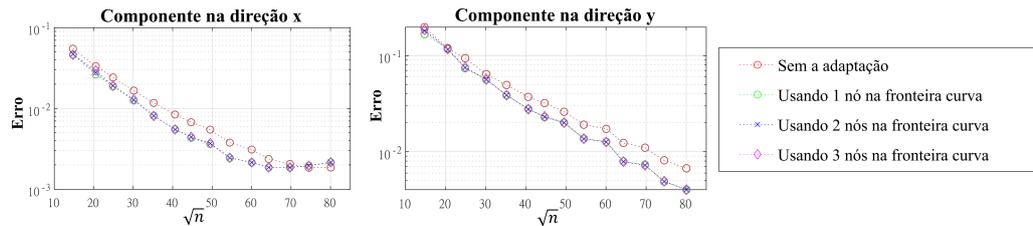


Figura 2: Variação do erro no cálculo dos deslocamentos conforme refinamento de malha.

Portanto, a proposta reduziu o erro do cálculo dos deslocamentos para uma mesma malha (em comparação com a solução de referência), indicando que a representação do domínio computacional foi mais adequada e os mapeamentos foram eficazes. Os resultados sugerem que a adaptação proposta pode ser melhor aproveitada no MEF e no MEF com funções de alta ordem, pois para melhor aproveitar os benefícios de tais métodos, utilizam-se malhas mais grossas [3]

## Agradecimentos

Esse trabalho possui suporte em parte pela FAPES, FAPEMIG, CNPq e CAPES

## Referências

- [1] W. G. Facco. “Tratamento de descontinuidade de material no Método de Elementos Finitos Generalizado”. Tese de doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- [2] N. KIM e B. V. SANKAR. **Introduction to Finite Element Analysis and Design**. 2012.
- [3] R. Sevilha. “UHDG-NEFEM for two dimensional linear elasticity”. Em: **Computers Structures** (2019), pp. 69–80.