

O Oscilador Harmônico: ordem inteira x ordem fracionária

Sandro Rodrigues Mazorche¹, Matheus Tobias Mendonça²

Departamento de Matemática - UFJF, Juiz de Fora, MG

Resumo.

Neste trabalho apresentamos um estudo numérico de uma equação que envolve fenômenos básicos de oscilações e propagação de ondas, que são de grande relevância na física e matemática. Do ponto de vista matemático, o Modelo do Oscilador Harmônico é regido por Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) simples de ordem 2 no tempo. Logo, sua versão em derivadas fracionárias será um modelo de ordem α no tempo, com $1 < \alpha < 2$, e será uma Equação Diferencial Fracionária (EDF- α). Realizamos duas abordagens matemática, uma teórica e outra numérica dos modelos em ordem inteira e não inteira e, assim, descrevemos um paralelo entre estas duas formulações, buscando características similares e/ou diferentes entre suas soluções. Desta forma, podemos compreender um pouco mais os fenômenos físicos e matemáticos que estas equações descrevem.

Palavras-chave. Equações Diferenciais, Derivada de Caputo, Oscilador Harmônico.

1 Introdução

O Cálculo Fracionário remonta ao início do cálculo clássico, com uma troca de correspondência entre l'Hôpital e Leibniz em 1695, fato este de discussão na comunidade científica. Mas, o que importa, é que de lá pra cá, muitos pesquisadores trabalharam arduamente para transformar o Cálculo Fracionário em uma área de pesquisa e conseqüentemente uma das ferramentas mais exploradas nas últimas décadas. Aplicar o Cálculo Fracionário no modelo do oscilador harmônico não é novidade, destacamos aqui alguns trabalhos ao longo das últimas três décadas [7],[9],[5],[6].

Do ponto de vista do cálculo fracionário, o oscilador harmônico é apenas mais um exemplo de um fenômeno de atrito-amortecido fracionário. Em outras palavras, enquanto no universo clássico o atrito e o amortecimento são descritos usando diferentes abordagens pelas EDOs, no universo fracionário as EDF- α nos permitem uma descrição unificada destes fenômenos. Este é um dos aspectos da abordagem fracionária, pois diferentes fenômenos, que parecem não estar relacionados em uma descrição clássica, agora aparecem como diferentes realizações dando um sentido mais amplo da teoria fracionária. Um outro aspecto é uma observação bastante técnica. A EDF- α mescla dois tipos clássicos e diferentes de uma equação diferencial. Por um lado, as soluções serão de uma equação diferencial não linear, que em geral é um tipo de equação bastante complicada de se resolver e, por outro lado, as soluções serão de uma equação diferencial simples de segunda ordem com coeficientes constantes que resultam da mesma equação fracionária. Este aspecto é de natureza geral e alimenta a esperança de que uma ampla gama de problemas complexos possam ser resolvidos analiticamente com o mínimo esforço usando Cálculo Fracionário, enquanto uma solução dentro da estrutura de uma teoria clássica pode ser difícil de se obter.

Uma interpretação física para o oscilador harmônico fracionário foi dada por [9] em termos de uma interpretação estatística de multipartículas: ele interpreta o oscilador fracionário como uma média de conjunto de osciladores harmônicos comuns governados por uma seta de tempo estocástica. A absorção intrínseca do oscilador fracionário resulta da contribuição total do conjunto

¹sandro.mazorche@ufjf.br

²tobias@ice.ufjf.br

do oscilador harmônico: esses osciladores diferem um pouco uns dos outros em frequência, de modo que cada resposta é compensada por uma resposta antifásica de outro oscilador harmônico.

Assim, nossa abordagem traçará um paralelo entre estes dois universos: Fracionário(EDF- α) x Clássico(EDO- (p, q)). Através das soluções dos dois modelos, que no caso fracionário será via funções de Mittag-Leffler, exploraremos suas características. Por meio de uma análise numérica através da programação matemática e do código em [3], iremos propor uma forma de calcular as constantes de uma EDO- (p, q) que estabelecerá uma relação entre a ordem α e as constantes (p, q) .

2 Preliminares

Introduziremos alguns conceitos e resultados básicos do Cálculo Fracionário que serão usados neste trabalho. Versão destes resultados mais detalhadas podem ser consultadas em [4], [2], [8].

Definição 2.1. *Função de Mittag-Leffler com um, dois e três parâmetros: Sejam $z \in \mathbb{C}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \rho \in \mathbb{R}$ três parâmetros tais que $Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0, \rho > 0$. Definimos a função de Mittag-Leffler com três parâmetros através da série de potência*

$$E_{\alpha, \beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad (1)$$

onde $(\rho)_k$ é o símbolo de Pochhammer. Particularmente, quando $\rho = 1$, temos a função Mittag-Leffler de dois parâmetros, denotada simplesmente por $E_{\alpha, \beta}^1(t) = E_{\alpha, \beta}(t)$. Já quando $\rho = \beta = 1$, obtemos a função Mittag-Leffler de um parâmetro, denotada por $E_{\alpha, 1}^1(t) = E_{\alpha, 1}(t) = E_{\alpha}(t)$.

Definição 2.2. *Derivada da Função de Mittag-Leffler com três parâmetros:*

$$\frac{d^k}{dt^k} E_{\alpha, \beta}^{\rho}(z) = (\rho)_k E_{\alpha, \beta + \alpha k}^{\rho + k}(z). \quad (2)$$

Propriedade 2.1. *Propriedade Assintótica da Função de Mittag-Leffler: Se $0 < \alpha < 2$, β um número arbitrário complexo e μ um número real arbitrário tal que $\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}$, então para um inteiro arbitrário $p \geq 1$ vale a seguinte expansão:*

$$E_{\alpha, \beta}(z) = - \sum_{k=1}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O(\|z\|^{-1-p}), \quad \|z\| \rightarrow \infty, \quad \mu \leq |arg(z)| \leq \pi. \quad (3)$$

Existem muitas definições de derivadas fracionárias como a de Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, mas a que iremos usar é a derivada no sentido de Caputo-Dzhrbashyan. Esta escolha se deve à sua ampla utilização em trabalhos relacionados, em geral justificada pelo fato de suas condições iniciais poderem ser tratadas como aquelas de ordem inteira.

Definição 2.3. *A derivada fracionária de Caputo com ordem α é definida para $t \in [a, b]$ por:*

$${}^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - \theta)^{n - \alpha - 1} \frac{d^n}{d\theta^n} f(\theta) d\theta, \quad \text{onde } \Gamma \text{ é a função Gama.} \quad (4)$$

Uma propriedade da derivada de Caputo é que a derivada de uma constante não nula é zero.

Definição 2.4. *A Transformada de Mellin de uma função $f(t)$ é dada por:*

$$\mathcal{M}[f(t)](s) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) t^{s-1} dt, \quad (5)$$

A transformada de Mellin $F(s)$ pode ser considerada o momento de ordem $(s - 1)$ da função $f(t)$ no intervalo $[0, \infty)$. Assim, a área sob a curva $f(t)$ (momento de ordem 0) é dada por $F(1)$, o primeiro momento é dado por $F(2)$, o segundo por $F(3)$ e assim por diante.

3 Modelo do Oscilador Harmônico

Uma descrição muito interessante do Oscilador Harmônico tanto Clássico quanto Fracionário pode ser vista em [5]. Aqui iremos apenas apresentar suas equações diferenciais e soluções.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Classico EDO-}(\frac{\gamma}{m}, \frac{k}{m}) & \text{Fracionário EDF-}\alpha \text{ com } 1 < \alpha < 2 \\
 y'' + \frac{\gamma}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0 & {}_a^C D_t^\alpha y + \omega^\alpha y = 0 \\
 y_0 e^{\frac{-\gamma}{2m}t} \cos(\mu t) + y'_0 e^{\frac{-\gamma}{2m}t} \sin(\mu t) & y_0 E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha) + y'_0 t E_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha)
 \end{array} \tag{6}$$

onde m, k e γ são constantes positivas, sendo m a massa, γ o coeficiente de atrito e k constante da mola. Com $\omega^\alpha = \frac{k}{m}$ e $\mu = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{\gamma}{2m})^2}$, para $\frac{k}{m} - (\frac{\gamma}{2m})^2 > 0$, pois será o caso que iremos analisar numericamente, os outros casos sairão de forma análoga. As condições iniciais dos modelos são $y_0 = y(0)$, $y'_0 = y'(0)$, respectivamente a posição e velocidade iniciais do movimento. Não iremos explorar as unidades das constantes neste trabalho, fato este muito importante.

Como já sabemos, para o caso clássico, a solução tem o comportamento oscilatório contínuo com decaimento exponencial. Logo, o plano de fase das funções convergirá para a origem em forma de uma espiral logarítmica em torno da origem. Para o caso fracionário ocorre um comportamento parecido à primeira vista. Mas vejamos as diferenças: Primeiro, a solução é dada por um par de funções de Mittag-Leffler, que possuem a característica de ter um número finito de zeros, [7],[9], e a outra é seu comportamento assintótico com $t \rightarrow \infty$ é semelhante a $\frac{1}{t^\alpha}$, propriedade 2.1. Estas duas propriedades juntas provocam uma oscilação finita em torno do eixo t , mas ainda sim irá de forma assintótica a zero. O plano de fase destas funções terá um comportamento inicial semelhante ao caso de ordem inteira, formará uma espiral em torno da origem mas depois se deslocará da origem e assim passando para uma convergência à origem sem oscilação. Como podemos verificar na Figura 1(a-f). A Figura 1(f) é um zoom da Figura 1(c) na origem. Usamos os seguintes valores para as simulações numéricas: $\omega = 1$, $y_0 = 1$ e $y'_0 = 1$. Os demais valores estarão indicados nas figuras.

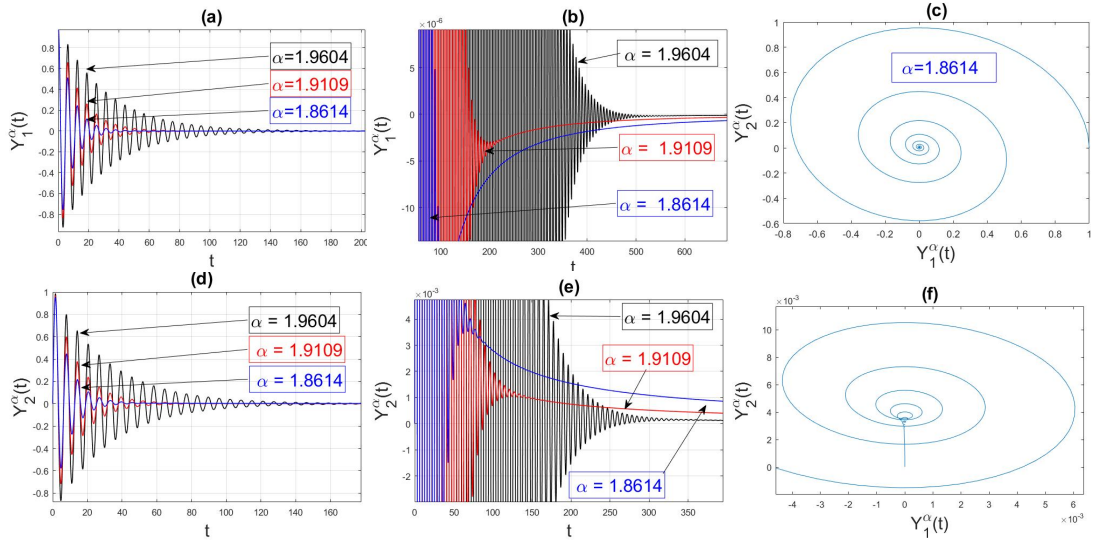


Figura 1: Funções $Y_1^\alpha(t) = E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha)$ e $Y_2^\alpha(t) = tE_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha)$. Fonte: autor.

Em geral, o oscilador harmônico fracionário se comporta como um oscilador harmônico amortecido. O amortecimento é intrínseco ao oscilador fracionário e não devido a influências externas como atrito, [7], [9]. No entanto, há uma correspondência das soluções do oscilador fracionário com as soluções do caso clássico com atrito, o que se torna óbvio, se compararmos o comportamento das soluções no início do movimento. Portanto, diante destas observações e do fato das

funções de Mittag-Leffler envolvidas na solução fracionária serem funções linearmente independentes, vamos propor uma construção de uma EDO- (p, q) de segunda ordem de coeficientes constantes, $y'' + py' + qy = 0$, que terá como solução uma função muito próxima à do caso fracionário e as constantes (p, q) terão uma relação intrínseca com a ordem α .

3.1 Proposta de construção da EDO- (p, q)

Tomando $y_1(t) = E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha)$ e $y_2(t) = tE_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha)$, e da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias Linear de Segunda Ordem: **Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial $y'' + P(t)y' + Q(t)y = 0$, onde $P(t)$ e $Q(t)$ são funções contínuas em um intervalo aberto I e se existe um ponto $t_0 \in I$ onde o wronskiano de y_1 e y_2 é diferente de zero, então a família de soluções $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ com coeficientes arbitrários c_1 e c_2 inclui todas as soluções da EDO.[1]**

Primeiro, iremos calcular as derivadas das funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\omega^\alpha t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha) & ; & \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\omega^\alpha t^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(-\omega^\alpha t^\alpha) \\ \frac{dy_2}{dt} &= E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha) & ; & \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\omega^\alpha t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha) \end{aligned} \quad (7)$$

Observe que a segunda derivada de $y_1(t)$ não está definida em $t = 0$, logo nosso intervalo I deverá estar contido em \mathbb{R}_*^+ . Seguem as expressões do Wronskiano, de sua derivada e de $W_2(t)$:

$$\begin{aligned} W(t) &= [E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha)]^2 + \omega^\alpha t^\alpha E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha) E_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha) \\ W'(t) &= \omega^\alpha t^{\alpha-1} [E_{\alpha,\alpha-1}(-\omega^\alpha t^\alpha) E_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha) - E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha) E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha)] \\ W_2(t) &= \omega^\alpha t^{\alpha-2} [\omega^\alpha t^\alpha [E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha)]^2 + E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha) E_{\alpha,\alpha-1}(-\omega^\alpha t^\alpha)] \end{aligned} \quad (8)$$

Podemos afirmar que existe um $T > 0$, tal que $W(t) > 0$ em $[0, T)$ e em $(0, T)$ temos que as funções $W'(t) > 0$ e $W_2(t) > 0$. A seta nos gráficos indica o sentido de crescimento de α .

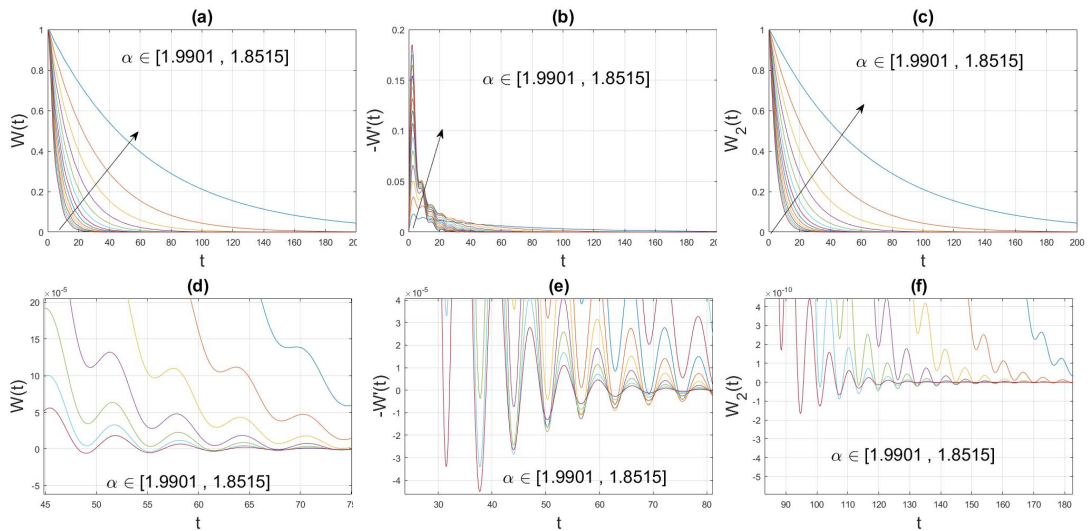


Figura 2: Gráfico de $W(t)$, $-W'(t)$ e $W_2(t)$. Fonte: autor.

O comportamento das três funções são similares, com oscilações muito pequenas em uma região próxima do eixo t como mostrado nas Figuras 2(d,e,f). Assim, no intervalo aberto $I = (0, T)$, podemos afirmar que a solução do caso fracionário também é a solução da EDO, com $P(t) = -\frac{W'(t)}{W(t)}$ e $Q(t) = \frac{W_2(t)}{W(t)}$, funções contínuas no intervalo I .

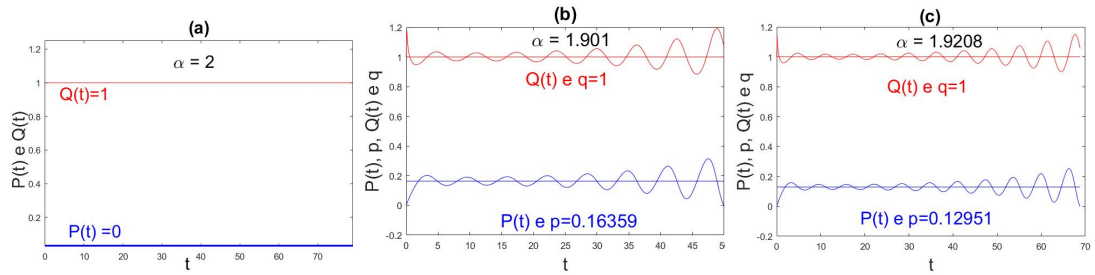


Figura 3: Gráficos dos pares $(P(t), p)$ e $(Q(t), q)$. Fonte: autor.

Como podemos notar na Figura 3(a), para $\alpha = 2$ temos o caso clássico e assim $P(t) = 0$ e $Q(t) = 1$ e para os outros valores de α , temos que estas funções oscilam em torno de uma semi-reta paralela ao eixo t . Logo, definiremos uma expressão para o cálculo destes valores que chamaremos de p e q . Mas antes, vamos fazer algumas observações no comportamento das funções $W(t)$, $W'(t)$ e $W_2(t)$. Em $t = 0$ temos que $W(0) = 1$, $W'(0) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow 0^+} W_2(t) = \infty$.

Já o comportamento assintótico, $|t^\alpha| \rightarrow \infty$, as expressões $W(t)$, $W'(t)$ e $W_2(t)$ se comportam das formas $\frac{1}{t^{2\alpha}}$, $\frac{1}{t^{2\alpha+1}}$ e $\frac{1}{t^{2+2\alpha}}$ respectivamente conforme propriedade 2.1. Assim, podemos usar a Transformada de Mellin nestas funções $W(t)$, $W'(t)$ e $W_2(t)$. Fazendo, $s = \alpha + 1$ obtemos um valor que será o equivalente a momentos fracionários, (α) , para estas funções. E assim definimos

$$p = -\frac{\overline{W'}}{\overline{W}} \quad \text{e} \quad q = \frac{\overline{W_2}}{\overline{W}}, \quad \text{onde} \quad \overline{W} = \int_0^\infty t^\alpha W(t) dt, \quad \overline{W'} = \int_0^\infty t^\alpha W'(t) dt \quad \text{e} \quad \overline{W_2} = \int_0^\infty t^\alpha W_2(t) dt.$$

As Figuras 3(b,c) ilustram os pares de gráficos de $(P(t), p)$ e $(Q(t), q)$. Note que os valores de (p, q) estão posicionados próximo de um ponto médio das oscilações. Isso corrobora com o estudo feito em [9] que deu a interpretação para o oscilador fracionário como uma média de conjunto de osciladores harmônicos comuns. Entendemos que as oscilações de $P(t)$ e $Q(t)$ traduzem uma resposta antifásica de outros osciladores harmônicos e assim os valores (p, q) são a absorção média intrínseca do oscilador fracionário, resultando em uma contribuição total do conjunto do oscilador harmônico fracionário.

3.2 Comparação entre os dois Universos: EDF- $\alpha \times$ EDO- (p, q)

Desta forma temos uma relação entre a ordem α do caso fracionário com as constantes (p, q) da EDO e assim podemos relacionar o modelo fracionário do oscilador harmônico com o modelo clássico do oscilador harmônico com amortecimento, nas Figuras 4 e 5 usamos $q = 1$ e $\omega = 1$.

$$\text{EDO-}(p, q): y'' + py' + qy = 0 \approx \text{EDF-}\alpha : {}^C D_t^\alpha y + \omega^\alpha y = 0 \tag{9}$$

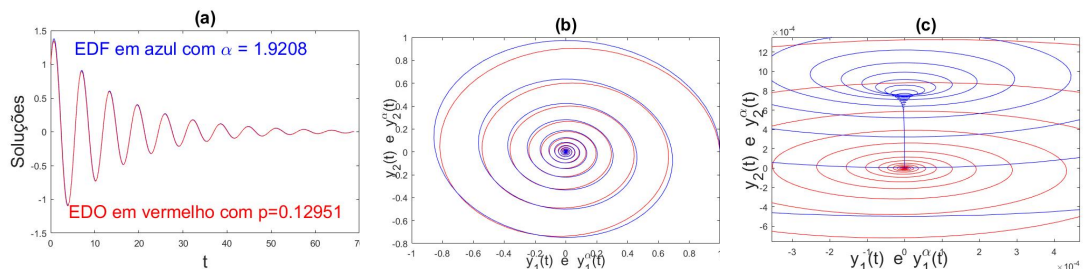


Figura 4: Soluções das EDF- α e EDO- (p, q) . Fonte: autor.

Podemos ver pela Figura 4(a) o quanto as soluções dos modelos EDF- α e EDO- (p, q) ficam próximas. As oscilações são praticamente iguais e se mantêm próxima por todo o tempo. Mas como já observamos, o comportamento das Mittag-Leffler não é de oscilações regulares (número de zeros finito), e sua convergência a zero não é oscilatória, portanto irá haver um distanciamento gradual destas soluções, como vemos na Figura 4(b) e na Figura 4(c) que é um zoom da Figura 4(b).

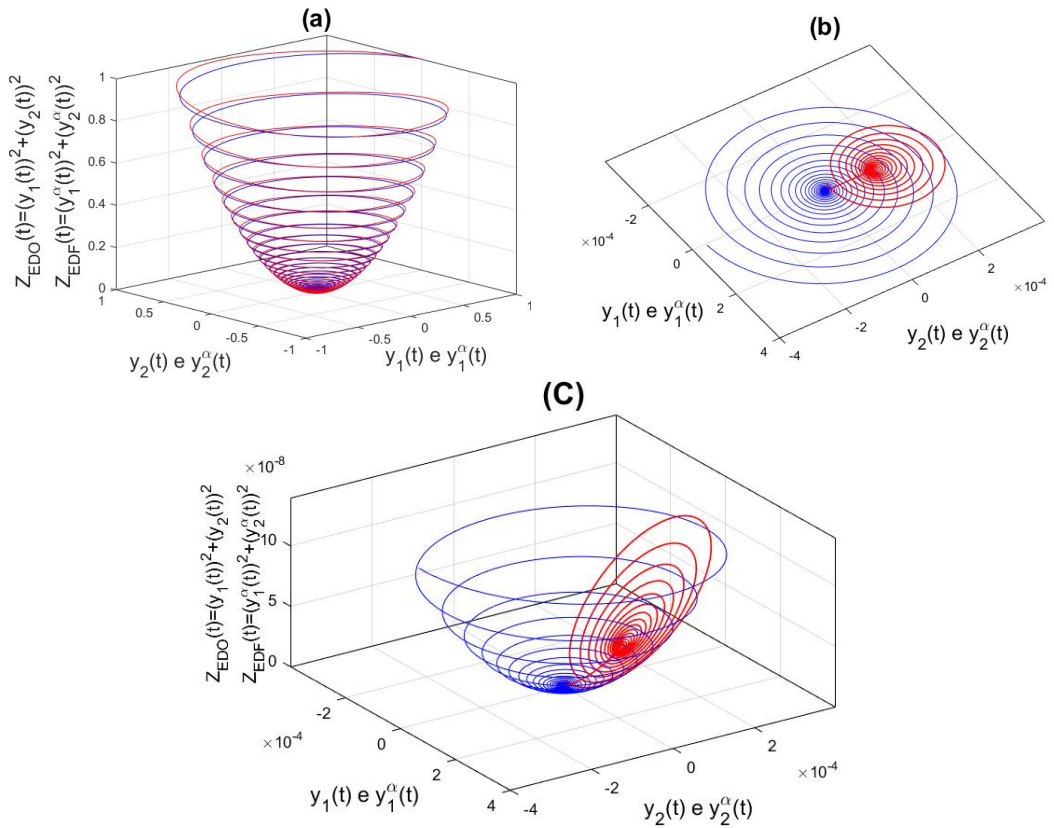


Figura 5: Soluções das EDF- α e EDO- (p, q) com $\alpha = 1.9604$ e $p = 0.063453$. Fonte: autor.

Nesta sequência da Figura 5, podemos ver com mais clareza a relação entre as soluções, bem como o comportamento assintótico entre elas. Na Figura 5(b) vemos com mais precisão a diferença de como as soluções se aproximam da origem. Já na Figura 5(c) vemos o deslocamento da espiral da solução fracionária e sua convergência para a origem de forma assintótica não oscilatória o que difere do padrão do caso inteiro.

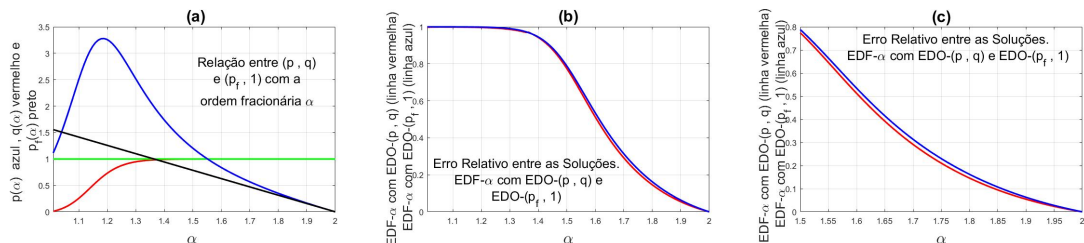


Figura 6: Relação e Erro entre α e (p, q) . Fonte: autor.

Realizamos uma análise comparativa entre nossa proposta para (p, q) e a fórmula apresentada em [5]. O cálculo da força de fricção é dada por $p_f = (\frac{k}{m})^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\pi}{2} (\alpha - 2)$ para $\alpha \approx 2$, mas não há uma indicativa de como obter o valor de q e como em [5] apresentam simulações para o caso onde $\omega = 1$ isso nos remete a usar $q = 1$ para a análise com esta fórmula. A Figura 6(a) mostra que p e p_f têm o comportamento bem similar no intervalo $(1.8, 2)$ e observamos também que no intervalo $(1.5, 2)$ temos $q \approx 1$. Na Figura 6(b,c) temos os erros relativos entre a solução Fracionária e as das EDO- (p, q) e EDO- $(p_f, 1)$ e vemos que nossa proposta é mais precisa.

4 Considerações Finais

Nosso objetivo foi estabelecer uma relação entre as equações do modelo oscilatório EDF- α e EDO- (p, q) para que tivéssemos um entendimento mais aprofundado dos fenômenos que regem os modelos. Ainda estabelecemos uma relação entre a ordem α e os parâmetros (p, q) .

Como dito anteriormente, esse tipo de modelagem fracionária traz uma interação entre fenômenos que é difícil de enquadrar em uma construção significativa para o caso fracionário. Ainda, nossa proposta de ajuste dos parâmetros (p, q) é bem fundamentada, mas ainda carece de um estudo mais analítico das expressões. Numericamente, vimos que é promissora, e nos fornecer uma ótima aproximação da solução. Entendemos que toda esta análise contribui muito para o entendimento do modelo fracionário, bem como traz uma luz no estudo da relação do coeficiente fracionário α com o coeficiente de atrito do caso clássico. E por fim, tudo isso nos levará a novos insights intrigantes e às vezes surpreendentes neste Multiverso Fracionário.

Agradecimentos

Agradecimentos à PROPP-UFJF e ao programa de Mestrado em Matemática da UFJF.

Referências

- [1] C. I. Doering e A. O. Lopes. **Equações Diferenciais Ordinárias**. 6a. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, 2016.
- [2] R. F. Camargo e E. C. de Oliveira. **Cálculo Fracionário**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- [3] R. Garrappa. “Numerical evaluation of two and three parameter Mittag-Leffler functions”. Em: **SIAM J. Numer. Anal.** 53 (3 2015), pp. 1350–1369. DOI: 10.1137/140971191.
- [4] R. Gorenflo et al. **Mittag-Leffler Functions Related Topics and Applications**. 1a. ed. Springer Monographs in Mathematics, 2014. DOI: 10.1007/978-3-662-43930-2.
- [5] R. Herrmann. **Fractional calculus : an introduction for physicists**. 2a. ed. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2014. ISBN: 978-9814551076.
- [6] J. Vaz Jr. e E. C. de Oliveira. “On the fractional Kelvin-Voigt oscillator”. Em: **Mathematics in Engineering** 4 (1 2022), pp. 1–23. DOI: 10.3934/mine.2022006.
- [7] F. Mainardi. “Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena”. Em: **Chaos, Solitons & Fractals** 7.9 (1996). DOI: 10.1016/0960-0779(95)00125-5.
- [8] I. Podlubny. **Fractional Differential Equations**. San Diego: Elsevier, 1999.
- [9] A. A. Stanislavsky. “Fractional oscillator”. Em: **Phys. Rev. E** 70 (5 2004), p. 051103. DOI: 10.1103/PhysRevE.70.051103.