

# Modelagem Matemática do Problema de Dimensionamento da Frota de Guinchos de uma Seguradora

Bruno Brito Pereira de Souza,<sup>1</sup> Melissa Frigi Mendes,<sup>2</sup> Pedro Diniz Sakai,<sup>3</sup> Luiz Leduino de Salles Neto<sup>4</sup>

ICT-UNIFESP, São José dos Campos, SP

**Resumo.** Este trabalho apresenta um modelo matemático para a definição de quantos guinchos de cada um dos  $n$  tipos, com diferentes parâmetros, seriam necessários e onde (*work areas*) eles deveriam ser alocados para atender a demanda do período  $t + m$  no menor custo. Em especial, abordou-se um problema real apresentado por uma empresa do ramo, que possui 5 tipos de guinchos a serem distribuídos em 37 *work areas*. Os guinchos dos tipos 1 até 4, denominados de parceiros, deveriam atender um mínimo de demandas. Os guinchos do tipo 5, denominados de prestadores avulsos, tinham um limite permitido máximo de  $p\%$  da frota, mas não possuíam um limite mínimo de atendimento. A abordagem garantiu que o dimensionamento da frota respeitasse as condições operacionais impostas. No entanto, sugere-se que o modelo apresentado seja utilizado apenas para o dimensionamento da frota e não para decisões operacionais diárias. A resolução utilizou método exato (MILP) com GAP de 0,01%. O modelo foi implementado utilizando o *framework* PYOMO e resolvido utilizando o *solver* GUROBI.

**Palavras-chave.** Dimensionamento de frota, *Cluster*, Modelagem Matemática, Método Exato (MILP).

## 1 Introdução

Neste trabalho, realizou-se um planejamento ótimo do serviço de guincho oferecido por uma seguradora. Cinco tipos de guinchos com diferentes disponibilidades de atendimento (janela de tempo) estavam disponíveis. Os guinchos dos tipos 1 até 4, denominados de parceiros, deveriam atender um mínimo de 8 demandas na semana. Os guinchos do tipo 5, denominados de prestadores avulsos (não parceiros), tinham um limite permitido máximo de  $p\%$  da frota, mas não possuíam um limite mínimo de atendimento. A janela permitida de atendimento de cada tipo de guincho é apresentada na Figura 1 abaixo.



Figura 1: Janela de atendimento para cada tipo de guincho. Fonte: Elaborado pelos autores.

<sup>1</sup>brunobritopereirasouza@gmail.com

<sup>2</sup>melissa.frigi@unifesp.br

<sup>3</sup>pedro.sakai@unifesp.br

<sup>4</sup>luiz.leduino@unifesp.br

As demandas estavam localizadas em 37 *work areas* (*WAs*) e distribuídas a cada hora entre 6h da manhã até 0h da noite. A matriz de distância em km entre as 37 *WAs* foi disponibilizada. Desse modo, o objetivo principal foi estimar o tamanho da frota de guinchos de cada tipo que deveriam ser contratados. A otimização estava condicionada pela:

- i. **minimização do custo**, definido como a soma dos valores de acionamento de um guincho (R\$100 por semana), do tempo ocioso em que um guincho espera imóvel antes de atender uma demanda (R\$200 por hora) e da distância percorrida por um guincho de uma *work area* para outra (R\$1,63 por km);
- ii. **tolerância**, que corresponde ao tempo máximo de 45 minutos em que uma demanda deve ser atendida após seu advento;
- iii. **marca**, isto é, dentre o total de guinchos, admitir no máximo 10% do guincho tipo 5 (prestadores avulsos não parceiros); e
- iv. **quantidade de atendimentos**, em que cada guincho dos tipos 1 até 4 deveriam atender no mínimo 8 demandas na semana.

Considerou-se que todos os guinchos eram iguais no consumo de combustível, na eficiência da prestação de serviço e na velocidade de locomoção. Havia 11.527 demandas na segunda-feira; 8.867 demandas em cada dia de terça-feira, quarta-feira, quinta-feira e sexta-feira; e 5.320 demandas em cada dia de sábado e domingo.

Por fim, o modelo foi submetido a 5 cenários que combinavam tempo de atendimento da demanda e velocidade de deslocamento do guincho entre *WAs*. Os cenários foram:

- i. **Cenário 1,0\_60**: 1h de atendimento e 60km/h de velocidade.
- ii. **Cenário 0,5\_60**: 0,5h de atendimento e 60km/h de velocidade.
- iii. **Cenário 1,0\_30**: 1h de atendimento e 30km/h de velocidade.
- iv. **Cenário 0,5\_30**: 0,5h de atendimento e 30km/h de velocidade.
- v. **Cenário aleatório**: em cada atendimento, aleatório entre 0,5h e 1h de atendimento e aleatório entre 30km/h e 60km/h de velocidade.

Ressalta-se que o modelo matemático apresentado na próxima seção é considerado uma variante do VRP (*Vehicle Routing Problem*). Conforme Laporte [4] afirma, o VRP é um problema muito estudado para solução de demandas de sistemas logísticos. Ele foi introduzido pela primeira vez por Dantzig e Ramser [1] como uma generalização do TSP (*Traveling Salesman Problem*), apresentado por Flood [2].

É importante ressaltar que diversos autores já propuseram formas exatas, heurísticas e híbridas para resolver problemas caracterizados como variantes do VRP. Por exemplo, Gzara e Lu [3] apresentaram uma abordagem para resolver um problema robusto de roteamento de veículos com janelas de tempo. Toth e Vigo [5], inclusive, escreveram um livro dedicado integralmente ao tema, onde apresentam (1) as diversas famílias de problemas de roteamento de veículos e (2) inúmeras abordagens exatas e heurísticas que já foram propostas na literatura para o problema. Sendo assim, esperava-se que algum modelo matemático já disponível na literatura pudesse ser integralmente utilizado neste trabalho, no entanto, mesmo após uma extensa revisão da literatura sobre o VRP e suas variantes, não foram encontrados artigos que consideraram exatamente todas as condicionantes do problema real solucionado neste artigo. Portanto, acredita-se que o modelo matemático aqui proposto e, principalmente, a estratégia delineada para a solução do problema sejam, conjuntamente, únicos.

## 2 Modelo Matemático

Nesta seção apresenta-se a modelagem matemática aplicada em cada *cluster* considerando as restrições do problema. Primeiramente, define-se as variáveis de decisão, os parâmetros e os conjuntos que compõem o modelo.

### 2.1 Variáveis

- i.  $x_{i,j,v}$ : variável binária cujo valor é 1 caso ocorra a ativação da rota de  $i$  para  $j$  pelos veículos do tipo  $v$ , e 0 caso contrário.
- ii.  $\beta_v$ : quantidade de veículos do tipo  $v$ . Variável inteira, porém, foi considerada como contínua para reduzir complexidade.
- iii.  $s_{i,v}$ : horário de entrada na demanda  $i$  pelos veículos do tipo  $v$ .
- iv.  $t_v^{OC}$ : tempo de ociosidade total dos veículos do tipo  $v$ .

### 2.2 Parâmetros

- i.  $\eta_v$ : mínimo de atendimentos por veículo no dia.
- ii.  $p$ : porcentagem máxima de uso dos veículos tipo 5.
- iii.  $M$ : definido como "BigM", corresponde a  $2 \times$  horizonte de planejamento.
- iv.  $a_i^D$ : janela de início da demanda  $i$ .
- v.  $b_i^D$ : janela de fim da demanda  $i$ . Note que,  $b_i^D = a_i^D + tol$ , onde  $tol$  é a tolerância.
- vi.  $a_v^V$ : janela de início de trabalho dos veículos do tipo  $v$ .
- vii.  $b_v^V$ : janela de fim de trabalho dos veículos do tipo  $v$ .
- viii.  $d_{i,j}$ : distância entre  $i$  e  $j$ .
- ix.  $t_j^{AT}$ : tempo de atendimento da demanda  $j$ .
- x.  $t_{i,j}^{DLC}$ : tempo de deslocamento entre demandas  $i$  e  $j$ , 0 se for dentro da mesma *work area*.
- xi.  $WA[i]$ :  $WA$  da demanda  $i$ .
- xii.  $N_k$ : número de dias similares a  $k$  dentro da semana.

### 2.3 Conjuntos

- i.  $\Omega_{1,4}^V$ : conjunto de tipos de veículos de 1 a 4.
- ii.  $\Omega_5^V$ : conjunto do tipo de veículo 5.
- iii.  $\Omega^V$ : conjunto de todos os tipos de veículos.
- iv.  $\Omega^D$ : conjunto de demandas.
- v.  $\Omega_i^D$ : conjunto de demandas que são conectadas (em rota) à demanda  $i$ .
- vi.  $\Omega_k^D$ : conjunto de demandas dentro do dia  $k$ .

## 2.4 Função Objetivo e Restrições

A seguir, temos a função objetivo que desejamos minimizar, bem como suas restrições

$$\min \sum_k \left( 1,63 \sum_v \sum_{i \in \Omega_k^D} \sum_{j \in \Omega_k^D} N_k d_{i,j} x_{i,j,v} + 100 \sum_v \beta_v + 200 \sum_v N_k t_v^{OC} \right). \quad (1)$$

Sujeito à:

- i. Cada demanda deve ser feita apenas por 1 veículo e somente com uma entrada. Rota entre demandas. Se rota ativada  $\rightarrow$  demanda atendida.

$$\sum_{j \in \Omega_i^D} \sum_{v \in \Omega^V} x_{j,i,v} = 1, \quad \forall i \in \Omega^D \setminus i_o. \quad (2)$$

- ii. Mínimo de  $\eta$  atendimentos por veículo ativado (dos tipos 1 a 4).

$$\sum_k \sum_{i \in \Omega_k^D} \sum_{j \in \Omega_i^D} N_k x_{i,j,v} \geq \eta_v \beta_v, \quad \forall v. \quad (3)$$

- iii. Máximo de  $p(10\%)$  veículos do tipo 5.

$$\sum_{v \in \Omega_5^V} \beta_v \leq p \sum_{v \in \Omega^V} \beta_v. \quad (4)$$

- iv. Somente podem partir  $\beta_v$  veículos do tipo  $v$  da origem. Note que na segunda, podemos ter 5 guinchos do tipo 1 e no fim de semana 3 guinchos. Nesse caso, os 2 guinchos não usados recebem ociosidade.

$$\sum_{j \in \Omega_k^D} x_{i_o,j,v} \leq \beta_v, \quad \forall k, \forall v \in \Omega^V. \quad (5)$$

- v. Somente sair da demanda  $i$  se tiver entrada.

$$\sum_{j \in \Omega_i^D} x_{i,j,v} \leq \sum_{j \in \Omega_i^D} x_{j,i,v}, \quad \forall i \in \Omega^D \setminus i_o, \forall v \in \Omega^V. \quad (6)$$

- vi. Somente deslocar se o guincho for ativado.

$$x_{i,j,v} \leq \beta_v, \quad \forall i \in \Omega^D \setminus i_o, \forall j \in \Omega_i^D \setminus i_o, \forall v \in \Omega^V. \quad (7)$$

- vii. Horário de chegada em uma demanda deve ser maior que o horário de chegada em outra demanda mais o seu tempo de atendimento e o tempo de deslocamento entre demandas.

$$s_{i,v} \geq s_{j,v} + t_j^{AT} + t_{j,i}^{DLC} - M(1 - x_{j,i,v}), \quad \forall i \in \Omega^D \setminus i_o, \forall j \in \Omega_i^D \setminus j_o, \forall v \in \Omega^V. \quad (8)$$

- viii. Janela permitida para chegada do veículo.

$$a_i^D \leq s_{i,v} \leq b_i^D, \quad \forall i \in \Omega^D, \forall v \in \Omega^V. \quad (9)$$

- ix. Proibindo atendimento de demandas fora da janela do veículo.

$$x_{j,i,v} = 0 \text{ (se } a_v^V > b_i^D \text{ ou } b_v^V < a_i^D), \quad \forall i \in \Omega^D, \forall j \in \Omega_i^D, \forall v \in \Omega^V. \quad (10)$$

- x. Tempo de ociosidade é igual a janela total de atendimento menos o tempo em atendimento e o tempo em deslocamento na janela. Considerar apenas  $t_i^{AT}$  se  $a_i^D < b_v^V$  (atendimento que começa no limite da janela do veículo).

$$t_v^{OC} = \sum_k N_k \beta_v (b_v^V - a_v^V) - \sum_{i \in \Omega^D} \sum_{j \in \Omega_i^D} x_{j,i,v} t_i^{AT} - \sum_{i \in \Omega^D} \sum_{j \in \Omega_i^D} x_{i,j,v} t_{i,j}^{DLC}, \quad \forall v \in \Omega^V. \quad (11)$$

### 3 Estratégia para Resolução do Problema

Para resolver de forma exata (MILP - *Mixed-Integer Linear Programming*) o problema de dimensionamento da frota de guinchos adotou-se, principalmente, duas estratégias: (1) clusterizar as 37 *WAs* (2) definir rotas candidatas.

As 37 *WAs* foram agrupadas em 6 *clusters* utilizando o método *Hierarchical Clustering*. As *WAs* de cada um dos clusters podem ser visualizadas na Figura 2 abaixo.

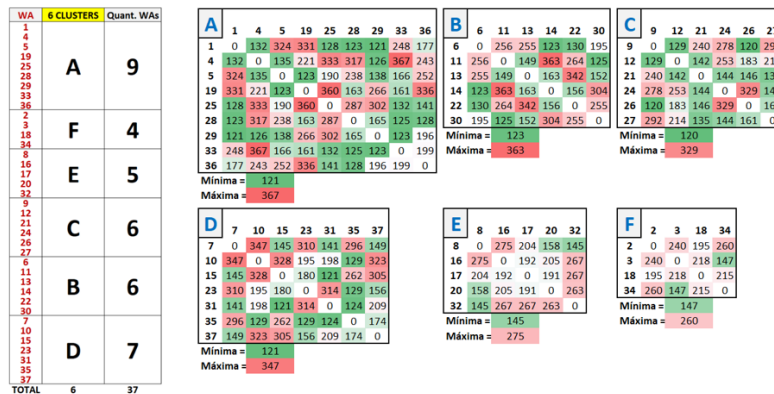


Figura 2: Matriz de distância em quilômetros com 6 clusters escolhidos. Fonte: Elaborado pelos autores.

A natureza do problema permitiu uma simplificação na combinação de rotas possíveis (conexão entre demandas), por exemplo, uma demanda na primeira hora do dia não poderia ser atendida após qualquer demanda posterior a ela. Portanto, existia uma sequência lógica de possibilidades. Outra simplificação possível foi a conexão entre demandas dentro de uma mesma hora. Como não existia distinção entre as demandas, a sequência delas é indiferente, portanto, pode-se definir apenas uma conexão entre essas demandas. A Figura 3 abaixo ilustra as conexões que foram permitidas entre demandas dentro de uma mesma *work area*.

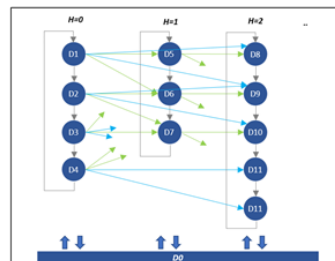


Figura 3: Conexões entre demandas dentro de uma mesma *work area*. Fonte: Elaborado pelos autores.

Na Figura 3, a região **D0** indica a localidade de início dos veículos e todas as demandas foram conectadas à essa região. Na hora  $H = 0$  tem-se 4 demandas. Cada demanda possui conexão apenas com uma outra demanda dentro desse mesmo horário. Para as conexões entre demandas de horário diferentes, reduziu-se as possibilidades de combinação para apenas 2 por hora. Essas simplificações foram necessárias para reduzir o espaço de soluções que o algoritmo avaliou, o que

permitiu a resolução de forma exata.

Dentro de um processo iterativo, o algoritmo desenvolvido conectou cada demanda de uma hora com 2 demandas da hora seguinte, essa conexão sempre foi da demanda da hora anterior para a demanda com menos conexões da hora posterior. As conexões não se limitaram apenas à 1 hora posterior de cada demanda, mas sim para todas as demandas futuras. Outra simplificação realizada foi o corte de conexões, dentro de uma mesma *WA*, entre uma hora  $H$  e demandas de hora  $H + X$  sempre que entre  $H$  e  $H + X$  exista alguma hora com número de demandas superior ao número de demandas em  $H$ . Desta forma, indicou-se que todos os carros que estavam atendendo dentro da hora  $H$  possuíam demandas suficientes para executarem após a hora  $H$ . Essa regra não se aplicou às demandas entre *WAs*. É importante destacar que essa simplificação não removeu as conexões entre a origem (**DO**) e as demandas de cada hora. Por fim, demandas mais distantes (em tempo) que 8h não possuíram conexões entre si, o que indica que ociosidades acima de 8h não foram esperadas.

Para que o problema fosse tratável de forma exata, definiu-se também que cada demanda possuía apenas 2 possibilidades de deslocamento para uma outra *WA*, conforme pode ser visualizado na Figura 4 abaixo.

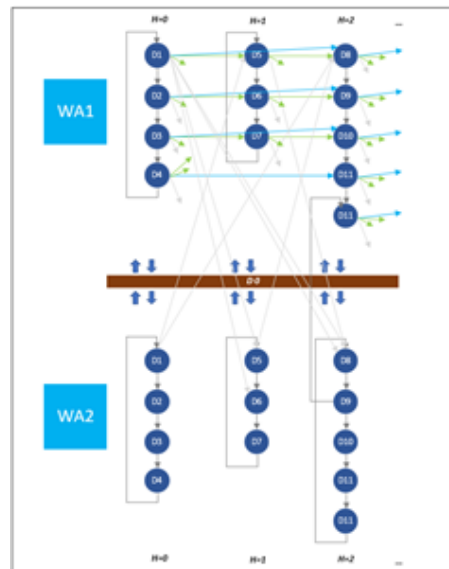


Figura 4: Conexões entre demandas de diferentes *work areas*. Fonte: Elaborado pelos autores.

A escolha da demanda de destino foi feita analisando a demanda com o menor número de conexões. Essa simplificação foi possível pois não existia distinção entre as demandas, ou seja, a conexão entre as demandas A e B não geravam um resultado diferente das conexões entre as demandas A e C, desde que B e C estivessem dentro de uma mesma *WA* em um mesmo horário.

## 4 Resultados dos Cenários

Os resultados dos cenários são apresentados na Figura 5 abaixo.

Resultados	1_60	0,5_60	1_30	0,5_30	ALEATÓRIO
<b>Total de Custo (R\$)</b>	<b>R\$9.854.231</b>	<b>R\$7.591.595</b>	<b>R\$6.809.517</b>	<b>R\$5.679.625</b>	<b>R\$11.479.714</b>
Ativação (Quant. x R\$ 100)	R\$143.300	R\$90.900	R\$143.100	R\$93.100	R\$143.400
Deslocamento (Km x R\$1,63)	R\$3.258.399	R\$2.401.710	R\$3.220.114	R\$2.347.063	R\$3.091.523
Ociosidade (Hrs x R\$200)	R\$6.452.531	R\$5.098.984	R\$3.446.303	R\$3.239.462	R\$8.244.790
<b>Total Veículos (Quant.)</b>	<b>1.433</b>	<b>909</b>	<b>1.431</b>	<b>931</b>	<b>1.434</b>
Tipo 1	0	0	0	1	0
Tipo 2	437	262	437	262	437
Tipo 3	553	364	552	382	555
Tipo 4	443	283	442	284	442
Tipo 5	0	0	0	2	0
<b>Km Rodados (Km)</b>	<b>1.999.018</b>	<b>1.473.442</b>	<b>1.975.530</b>	<b>1.439.916</b>	<b>1.896.640</b>
Tipo 1	0	0	0	2.602	0
Tipo 2	824.593	567.366	954.496	590.885	753.178
Tipo 3	731.047	574.290	741.707	607.528	704.476
Tipo 4	443.378	331.786	279.327	231.046	438.986
Tipo 5	0	0	0	7.855	0
<b>Horas Ociosas (Hrs)</b>	<b>32.263</b>	<b>25.495</b>	<b>17.232</b>	<b>16.197</b>	<b>41.224</b>
Tipo 1	0	0	0	27	0
Tipo 2	14.299	10.584	5.108	5.455	16.316
Tipo 3	13.460	10.809	7.641	7.437	17.574
Tipo 4	4.503	4.102	4.483	3.257	7.334
Tipo 5	0	0	0	21	0

Figura 5: Resultados dos cenários. Fonte: Elaborado pelos autores.

O **Cenário 0,5\_30** (0,5h de tempo atendimento e 30km/h de velocidade de deslocamento entre *WAs*) apresentou o menor custo de R\$5.679.625 e exigiu a disponibilização de 931 guinchos.

## 5 Considerações Finais

A abordagem garantiu que o dimensionamento da frota respeitasse as condições operacionais impostas. No entanto, sugere-se que o modelo apresentado seja utilizado apenas para o dimensionamento da frota e não para decisões operacionais diárias. Para que o modelo pudesse ser utilizado em decisões operacionais diárias, ele, principalmente, deveria incorporar (1) as condições do trânsito em diferentes locais e horas do dia; (2) a definição de qual percurso o guincho deveria realizar para atender as demandas; e (3) o uso da localização final do guincho após um atendimento como ponto de partida para o atendimento da próxima demanda. A resolução utilizou método exato (MILP) com GAP de 0,01%, o que significa que o custo mínimo ótimo apresentado pode ser no máximo 0,01% menor. O modelo foi implementado utilizando o *framework* PYOMO e resolvido utilizando o *solver* GUROBI.

## Referências

- [1] G. Dantzig e J. H. Ramser. “The truck dispatching problem”. Em: **Management science** 6.1 (1959), pp. 80–91.
- [2] M. Flood. “The traveling-salesman problem”. Em: **Operations research** 4.1 (1956), pp. 61–75.
- [3] F. Gzara e D. Lu. “The robust vehicle routing problem with time windows: Solution by Branch and Price and Cut”. Em: **European Journal of Operational Research** 275.3 (2019), pp. 925–938.
- [4] G. Laporte. “Fifty years of vehicle routing”. Em: **Transportation science** 43.4 (2009), pp. 408–416.
- [5] P. Toth e D. Vigo. **Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications**. Second Edition. Society for Industrial e Applied Mathematics (SIAM), 2014.