Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Polinômios Ortogonais de Legendre em Várias Variáveis

Mariana Aparecida Delfino de Souza
Depto de Matemática Aplicada, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: maridelfino6@yahoo.com.br,

Cleonice Fátima Bracciali
Depto de Matemática Aplicada, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: cleonice@ibilce.unesp.br.

RESUMO

Os polinômios ortogonais em uma variável são ferramentas importantes na solução de diversos tipos de problemas e sua teoria contribui nos estudos relacionados à estabilidade numérica, equações diferenciais, frações contínuas, teoria da aproximação, entre outros. A teoria desses polinômios é amplamente estudada, com muitos trabalhos publicados na área, como o livro de T. S. Chihara [2].

Em várias variáveis, os estudos desses polinômios têm-se difundido com maior intensidade nas últimas décadas. Segundo C. F. Dunkl e Y. Xu em [3], o primeiro trabalho nessa área é o livro [1] "Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques - Polynomes D'Hermite" de P. Appell e J. Kampé de Feriét, de 1926, que foi tomado como base neste trabalho.

De acordo com [3], os poucos livros dedicados à teoria geral dos polinômios ortogonais em várias variáveis têm como ênfase o tipo clássico desses polinômios, ou seja, as famílias de polinômios cujas funções peso têm como domínio as regiões regulares: o quadrado, o simplex, a bola em $\mathbb{R}^n$ ou o próprio $\mathbb{R}^n$.

Aqui, apresentamos como os polinômios de Legendre em n variáveis, de grau $m_1 + \cdots + m_n$, denotados por $V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n)$, que são ortogonais na região da bola unitária, e algumas de suas propriedades, podem ser obtidas através da extensão de alguns de seus conceitos e propriedades destes polinômios já conhecidas em uma variável. Um exemplo desta extensão é a função hipergeométrica, que em uma variável é dada, para $V_m(x)$, por

$$V_m(x) = 2^m \left(\frac{1}{2}\right)_m \frac{x^m}{m!} F\left(\frac{-m}{2}, \frac{1-m}{2}; \frac{1}{2} - m; \frac{1}{x^2}\right),$$

com

$$F(a, b; c; x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j (a_2)_j}{(b_1)_j j!} x^j,$$

e $(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $(a)_0 = 1$.

Em várias variáveis, temos

$$\begin{aligned} V_{m_1,\ldots,m_n}(x_1, \ldots, x_n) = \;& 2^\mu \left(\frac{n}{2}\right)_\mu \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \\ & \times F_B\left(-\frac{m_1}{2}, \ldots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1-m_1}{2}, \ldots, \frac{1-m_n}{2}; -\frac{n}{2} - \mu + 1; \frac{1}{x_1^2}, \ldots, \frac{1}{x_n^2}\right), \end{aligned}$$

onde

$$F_B(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n; \gamma; x_1, ..., x_n) = \sum_{j_i=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{j_1}(\beta_1)_{j_1}...(\alpha_n)_{j_n}(\beta_n)_{j_n}}{(\gamma)_j j_1!...j_n!} x_1^{j_1}...x_n^{j_n},$$

com $j = j_1 + ... + j_n$.

Além da função geratriz e da relação de ortogonalidade, a analogia da extensão de uma para várias variáveis dos Polinômios de Legendre também pode ser observada na sequência lógica da demonstração das funções hipergeométricas, dadas anteriormente.

Palavras-chave: *Polinômios ortogonais, Polinômios ortogonais de Legendre, Polinômios ortogonais em várias variáveis*

Referências

[1] P. Appell, J. Kampé de Feriét, "Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques - Polynomes D'Hermite", Ed. Gauthuer-Villars et C^{ie}, Paris, 1926.

[2] T. S. Chihara, "An Introduction to Orthogonal Polynomials", Serie Mathematics and its Applications v. 13, Gordon and Breach, New York, 1978.

[3] C. F. Dunkl, Y. Xu, "Orthogonal Polynomials of Several Variables", Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[4] R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw, "Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues", Springer-Verlag, Berlin, 2010.