Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Cotas para o número de orientações de um grafo evitando famílias fixas de grafos orientados

Matheus Micadei Marzo[1]
Orientador: Carlos Hoppen[2]
UFRGS, Porto Alegre, RS

1 Caracterização do problema e resultados obtidos

Erdős propôs, em 1974, um problema envolvendo grafos orientados: um grafo orientado $\overrightarrow{H}$ é um grafo em que para cada aresta $\{u, v\}$ é associada a direção uv (e dizemos, nesse caso, que a aresta está orientada de u para v) ou a direção vu. Dado um grafo orientado $\overrightarrow{H}$ e um inteiro positivo n, determine ou estime o número máximo de orientações de um grafo de n vértices sem conter nenhuma cópia de $\overrightarrow{H}$, isto é, sem cópia de H, cujas arestas estão orientadas como $\overrightarrow{H}$. Tais orientações são ditas livres de $\overrightarrow{H}$ e nesse trabalho iremos referenciar esse número pela expressão $c(n, \overrightarrow{H})$. Alon e Yuster [1] mostram que esse problema está bem resolvido para torneios (para n suficientemente grande) e para os demais casos, devido as contribuições de Bucić, Janzer e Sudakov [2], existem cotas assintóticas. Propomos analisar, discutir e ampliar esses resultados na situação em que desejamos evitar uma família $\mathscr{F}$ de grafos orientados.

O problema de Erdős está relacionado intrinsecamente com o Teorema que Turán, que responde a seguinte questão sobre grafos não orientados: qual o número máximo de arestas que um grafo de n vértices pode ter evitando algum subgrafo completo K_k com $k \geq 3$. Podemos generalizar essa pergunta considerando grafos com n vértices evitando um determinado grafo H. Denotamos o número máximo pela expressão $\operatorname{ex}(n, H)$, esse problema pode ser naturamente estendido para famílias $\mathscr{H}$ de grafos proibidos, o que leva a quantidade $\operatorname{ex}(n, \mathscr{H})$.

Um resultado claro é que, se um grafo for livre de H, suas orientações certamente são livres $\overrightarrow{H}$, independentemente de como as arestas estejam orientadas. Logo, a desigualdade $2^{\operatorname{ex}(n,H)} \leq c(n, \overrightarrow{H})$ é evidente. No caso de torneios, o resultado de [1] mostra que essa desigualdade vale com igualdade quando n é suficientemente grande.

Uma expansão natural dos resultados já estudados seria analisar o caso em que $\mathscr{F} = \{\overrightarrow{H_1}, \ldots, \overrightarrow{H_\ell}\}$, onde cada $\overrightarrow{H_i}$ é uma orientação de um grafo H_i. Denote por $c(n, \mathscr{F})$ o número máximo de orientações de um grafo com n vértices livres dos elementos de $\mathscr{F}$. Temos assim que $c(n, \mathscr{F}) \leq \min\{c(n, \overrightarrow{H_i}) : i \in \{1, \ldots, \ell\}\}$, já que $c(n, \mathscr{F}) \leq c(n, \overrightarrow{H_i})$ para cada i. Portanto, para $\mathscr{H} = \{H_1, \ldots, H_\ell\}$, as seguinte cotas são verdadeiras:

$$2^{\operatorname{ex}(n,\mathscr{H})} \leq c(n, \mathscr{F}) \leq \min\{c(n, \overrightarrow{H_i}) : i \in \{1, \ldots, \ell\}\}. \tag{1}$$

Estamos agora em condições de considerar alguns casos particulares.

[1]matheus.marzo@ufrgs.br
[2]choppen@ufrgs.br

Teorema 1.1. *Seja $\mathscr{F}$ uma família finita de orientações onde cada grafo $\overrightarrow{H_i}$ é uma orientação do grafo H. Então, temos*

(a) Se H é um torneio então $c(n, \mathscr{F}) = 2^{\mathrm{ex}\,(n,H)}$

(b) Se H é bipartido então $c(n, \overrightarrow{H}) = 2^{\theta(n)}$ ou $c(n, \overrightarrow{H}) = 2^{\theta(n \log(n))}$.

Caso H contenha um subgrafo cíclico, os resultados [2] garantem que $c(n, \overrightarrow{H_i}) = 2^{\theta(n^\alpha)}$ se existe α real tal que $\mathrm{ex}\,(n, H) = \Theta(n^\alpha)$. Portanto, as desigualdades em (1) implicam $c(n, \mathscr{F}) = 2^{\Theta(n^\alpha)}$. Quando H não é bipartido, obtém-se a cota $2^{\mathrm{ex}\,(n,H)} \leq c(n, \mathscr{F}) \leq 2^{(1+\epsilon)\,\mathrm{ex}\,(n,H)}$.

Para a situação onde H não contém ciclo existem dois casos de interesse [2], sendo que em um dos casos o número de orientações é da ordem do número de orientações do grafo de Turán (isto é, $c(n, \overrightarrow{H}) = 2^{\theta(n)}$). Os demais tem um comportamento diferente, e o número de orientações satisfaz $c(n, \overrightarrow{H}) = 2^{\theta(n \log(n))}$.

Considere agora uma família de orientações $\mathscr{F} = \{\overrightarrow{H_1}, \ldots, \overrightarrow{H_\ell}\}$ de um grafo acíclico H. Dividiremos em duas situações possíveis: (a) quando existe uma orientação $\overrightarrow{H_i}$ do primeiro caso, (b) quando todas as orientações são do segundo caso. Para (a), considerando a equação 1, e que o grafo de Turán evitando grafos bipartidos satisfaz $ex(n, H) = \theta(n)$, afirmamos que

$$c(n, \mathscr{F}) = 2^{\theta(n)}.$$

No caso (b) temos

$$c(n, \mathscr{F}) = 2^{\theta(n \log n)}.$$

O Teorema 1.1 mostra que quando $\mathscr{F}$ é uma família de orientações do mesmo grafo H a generalização do problema de Erdős está bem resolvida, a menos de eventuais constantes. Um próximo passo é considerar situações em que $\mathscr{F} = \{\overrightarrow{H_1}, \ldots, \overrightarrow{H_\ell}\}$ onde as orientações $\overrightarrow{H_i}$ dos grafos H_i não são necessariamente orientações de um mesmo grafo. Nessa situação, a relação entre $\mathrm{ex}\,(n, \mathscr{H})$ e $\mathrm{ex}\,(n, H_i)$ para $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ é mais complicada. Alguns resultados com respeito a compacidade da família $\mathscr{H}$ permitem encontrar algumas cotas para $c(n, \mathscr{F})$ de forma semelhante ao Teorema 1.1. Alguns dos resultados de compacidade mencionados determinam casos em que $\mathrm{ex}\,(n, \mathscr{H}) = \min \theta(\mathrm{ex}\,(n, H_i)))$.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES).

Referências

[1] N. Alon e R. Yuster. "The number of orientations having no fixed tournament". Em: **Combinatorica** 26.1 (2006), pp. 1–16. DOI: 10.1007/s00493-006-0001-6.

[2] M. Bucić, O. Janzer e B. Sudakov. "Counting H-free orientations of graphs". Em: **arXiv preprint arXiv:2106.08845** (2021). DOI: 10.48550/arXiv.2106.08845.

