Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Estudo comparativo entre as versões linear e não-linear do MSF para a resolução da equação de Poisson

Iago de Carvalho Abalada[1]
Fabrício Magalhães Coutinho[2]
Antonio Carlos da Silva[3]
Wilian Jeronimo dos Santos[4]
Edivaldo Figueiredo Fontes Junior[5]
DEMAT/UFRRJ, Seropédica, RJ

A utilização de métodos sem malha como, por exemplo, o MSF (Método das Soluções Fundamentais) [1], para a aproximação de soluções de equações dieferenciais é uma alternativa aos tradicionais métodos com malha, tais como o MEF (Método dos Elementos Finitos) [3] e o MEC (Método dos Elementos de Contorno) [4].

Dado um problema de valores de contorno com condição de Dirichlet

$$\mathcal{L}u(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

$$u(x,y) = g(x,y), \qquad (x,y) \in \partial\Omega, \tag{2}$$

a estratégia do MSF consiste em aproximar a solução como uma combinação linear de soluções fundamentais de (1), ou seja, funções u^* que satisfazem

$$\mathcal{L}u^* = \delta, \tag{3}$$

onde δ é a função delta de Dirac. Isto é feito selecionando fontes virtuais $\xi_1, ..., \xi_n$ e representando a solução aproximada $\hat{u}$ como combinação linear de soluções fundamentais $u^*_{\xi_j}$ $(j = 1, ..., n)$. Ao discretizar o contorno, onde conhecemos o valor da função u, como $\{(x_1, y_1), ..., (x_m, y_m)\}$, podemos obter os coeficientes α_j $(j = 1, ..., n)$ ao resolver o sistema linear

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u^*_{\xi_j}(x_i, y_i) = g(x_i, y_i), \qquad i = 1, ..., m. \tag{4}$$

Na versão não-linear do MSF, ao invés de fixar as posições das fontes virtuais, estas também são tomadas como incógnitas e objetivo se torna minimizar o erro total da aproximação com relação aos valores conhecidos no contorno:

$$\sum_{i=1}^{m} \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u^*_{\xi_j}(r_j(x_i, y_i)) - u(x_i, y_i) \right\|^2. \tag{5}$$

Iremos trabalhar com um exemplo da equação de Poisson sujeita à condição de Dirichlet:

$$\Delta u(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{6}$$

$$u(x,y) = g(x,y), \qquad (x,y) \in \partial\Omega. \tag{7}$$

[1] iagoabalada@gmail.com
[2] fabricio.mrj@hotmail.com
[3] antonionet1230@gmail.com
[4] wilianj@gmail.com
[5] edivaldofontes@ufrrj.br

A ideia é escrever a solução como $u = u_h + u_p$, onde u_p é uma solução particular da EDP (6), mas não necessariamente satisfaz a condição de contorno, e u_h é solução do sistema

$$\Delta u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{8}$$
$$u(x,y) = g(x,y) - u_p(x,y), \qquad (x,y) \in \partial\Omega. \tag{9}$$

Deste modo, u satisfaz o problema original.

Para obter a solução particular, interpolaremos f como uma combinação linear de funções de base radial $\phi_1, ..., \phi_l$ apropriadas, cujas soluções analíticas da equação

$$\Delta\Phi_k = \phi_k \qquad (k = 1, ..., l) \tag{10}$$

são conhecidas [2]. Assim, se $f = \sum_{k=1}^{l} a_k\phi_k$, com $a_1, ..., a_l \in \mathbb{R}$, então $u_p \simeq \sum_{k=1}^{l} a_k\Phi_k$.

Já a solução u_h será encontrada utilizando as versões linear e não-linear do MSF, a fim de comparar os dois métodos com relação à qualidade da solução e ao custo computacional.

Referências

[1] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles e L. C. Wrobel. **Boundary Elements Techniques: Theory and Applications in Engineering**. New York: Springer-Verlag, 1984. ISBN: 9783642488627.

[2] M. A. Golberg. "The method of fundamental solutions for Poisson's equation". Em: **Engineering Analysis with Boundary Elements** (1995), pp. 205–213. DOI: 10.1016/0955-7997(95)00062-3.

[3] T. J. R. Hughes e T. Hughes. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Dover Publications, 2000. ISBN: 9780486411811.

[4] V. D. Kupradze e M. A. Alekside. "The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems". Em: **Compuational Mathematics and Mathematical Physics** (1964), pp. 82–126. DOI: 10.1016/0041-5553(64)90006-0.

