

# Uma abordagem educacional da modelagem matemática aplicada ao preço da moeda Bitcoin

Ighor O. M. Rimes<sup>1</sup>

Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Augusto C. de C. Barbosa<sup>2</sup>, Carlos A. de Moura<sup>3</sup>, Cristiane O. Faria<sup>4</sup>

IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

**Resumo.** Este trabalho apresenta uma proposta de modelagem matemática para o preço (em reais) da moeda Bitcoin de agosto de 2020 até agosto de 2021, com o emprego de funções estudadas por alunos do 1º ano no Ensino Médio e uso de planilhas eletrônica com o aplicativo Excel, escolhido por ser de fácil obtenção e manipulação. Utiliza-se o coeficiente de determinação para escolher qual função modela melhor o problema e com isso procura-se prever o preço desta moeda nos 5 dias após o fim da base de dados. Por fim, é visto que mesmo o melhor modelo presente neste trabalho ainda se distancia de uma boa previsão. Porém a atividade mostra-se enriquecedora para este público por aprofundar o estudo dessas funções e viabilizar a conexão com diversos temas atuais de interesse para o alunado.

**Palavras-chave.** Modelagem Matemática, Funções, Ensino, *Excel*, Bitcoin

## 1 Introdução

Em 20 de dezembro de 2017 foi homologada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) pela portaria 1570 e com ela o governo brasileiro escolheu seguir uma tendência pedagógica global: a inserção de disciplinas em seu currículo escolar no nível médio que aproximem mais a prática dos conceitos já abordados de forma teórica no Ensino Médio. Um dos exemplos é a inserção da disciplina de Educação Financeira, criada pelo Comitê de Regulação e Fiscalização dos Mercados Financeiros, de Capitais, de Seguros, de Previdência e Capitalização (Coremec) intitulada Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF). Pensar em Educação Financeira é, além de compreender meios para que se tenham economias mais sustentáveis, evitar gastos desnecessários e poupar recursos para algum objetivo. Atualmente, com a facilidade de acesso em aplicativos de corretoras, é possível pensar em investimentos. Nos últimos anos, dentre os investimentos mais comentados temos as criptomoedas, em especial, o Bitcoin [13].

Antes de entender o sistema associado a essa moeda surge a dúvida: o que é de fato uma criptomoeda? Sua denominação se deve a ocorrência da viabilização a partir de métodos criptográficos, ou seja, de um conjunto de técnicas matemáticas, proteger dados transmitidos e armazenados a partir da transformação da informação legível em códigos ininteligíveis [3].

Já o Bitcoin é uma moeda digital *peer-to-peer* (par a par, ou simplesmente, de ponto a ponto), de código aberto. Segundo Ulrich em [14], significa que não depende de uma autoridade central, a transação é feita diretamente entre os interessados e um dos aspectos que tornam o Bitcoin único,

---

<sup>1</sup>ighor.rimes@ime.uerj.br

<sup>2</sup>acch@ime.uerj.br

<sup>3</sup>demoura@ime.uerj.br

<sup>4</sup>cofaria@ime.uerj.br

é ele possuir todas as melhores características da melhor moeda, sendo escasso, divisível, portátil, inclusive além, na direção do ideal monetário, por ser ao mesmo tempo “sem peso e sem espaço”, é incorpóreo. Isso possibilita a transferência de propriedade a despeito da geografia a um custo virtualmente nulo e sem depender de um intermediário, contornando dessa forma todo o sistema bancário. Por ser um tema tão atual, este pode ser utilizado em sala de aula como uma proposta de educação financeira.

Outro conteúdo que vem sendo muito discutido, relativamente a como deve ser apresentado ao ciclo básico, é o de Funções. Sierpinska [11] afirma que, pelo menos desde o início do século XX, o conceito de função foi considerado como um dos fundamentais na Matemática. No entanto, o estudo deste tópico no Ensino Médio brasileiro segue ainda uma estrutura superada, tratado de forma independente e sem conexão alguma com outros tópicos. Esta metodologia vai em sentido oposto às ideias matemáticas, que são resultados de um processo que procura explicar e compreender fatos e fenômenos observados na realidade [4]. O desenvolvimento dessas ideias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaborações de suas representações da realidade. Tais representações constituem o que se costuma chamar de “modelos matemáticos”, cuja obtenção, aplicação e avaliação compõem a modelagem matemática.

A modelagem aplicada ao ensino pode ser um caminho para despertar um maior interesse e ampliar o conhecimento do aluno, auxiliando na estruturação de sua maneira de pensar e agir [1]. D’Ambrósio [5] cita ainda que, em relação às escolas, o maior desafio dos matemáticos e educadores matemáticos é “fazer uma Matemática integrada no pensamento e no mundo moderno” e aponta a Modelagem Matemática como um caminho para contribuir para o enfrentamento deste desafio.

Apoiado nesses argumentos, aliados a essa nova forma de se pensar em moeda, este trabalho desenvolve uma proposta de modelagem matemática utilizando ajustes de curvas para o preço da moeda Bitcoin que pode ser reproduzido em salas de aulas do 1º ano do Ensino Médio. Esta proposta permite a fixação de conceitos de funções, em particular a função linear, exponencial e quadrática, e a conexão destas em uma aplicação bem atual. Outra conexão interessante desta proposta é o fato de ser ela desenvolvida com o suporte de tecnologias digitais (TD) acessível a todos via *smartphones* ou computadores, no caso, uma planilha eletrônica pelo aplicativo Excel.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: na Seção 2 definimos as criptomoedas, especificamente o Bitcoin. Na Seção 3, estamos interessados em responder a seguinte pergunta: Qual é a melhor curva ajustada quando consideramos as funções linear, exponencial e quadrática? Após encontrarmos esta resposta iremos avaliar se este modelo poderia ser utilizado para prever o preço da moeda em dias posteriores ao intervalo utilizado no ajuste (ver Seção 4) e nossas considerações finais são exibidas na Seção 5.

## 2 As Criptomoedas e seu modelo econômico

A moeda digital permite ao usuário final efetuar transação de pagamento, transferir dinheiro, pagar contas, tudo isso ainda sendo gerido por um banco da escolha do usuário. As criptomoedas são totalmente digitais [12]. Não existe a possibilidade de ir a um banco para sacar, pois elas não possuem cédulas, podendo ser utilizadas atualmente como dinheiro ainda em poucas transações. Vale ressaltar que não há qualquer tipo de regulamentação a respeito do uso de criptomoedas, o que é visto de forma amedrontadora por uns, já que não existe inicialmente uma forma de rastrear as transações. Existiam, no ano de 2021, entre 10.000 a 15.000 criptomoedas [7], mas neste trabalho exploraremos apenas uma, a intitulada Bitcoin [9], por ser a primeira criada e a mais famosa.

## 2.1 Bitcoin

O protocolo Bitcoin foi originalmente anunciado em um artigo publicado em novembro de 2008 por Satoshi Nakamoto [9]. No sistema tradicional, sabe-se que quem tem o dinheiro é quem possui a cédula ou a conta bancária, sendo sinalizado pelo banco qual o valor. Quanto ao Bitcoin, não são armazenadas de forma centralizada ou local e, portanto, não existe um dono. Eles existem como registros em um livro contábil, distribuído, chamado *Blockchain*<sup>5</sup>, cujas cópias são compartilhadas por uma rede voluntária de computadores conectados. Assim, possuir uma Bitcoin significa ter a capacidade de transferir o controle para outra pessoa, criando um registro da transferência na Blockchain [10]. Segundo o site Bit2me [2], em 2009, quando houve a primeira transação, um Bitcoin custava 0,00076392 dólar, ou seja, bem menos que 1 centavo de dólar. Em julho de 2010 o custo era de 0,08 dólar, um aumento de 10.472%.

Com a compreensão inicial do que são criptomoedas e, em especial o Bitcoin, além de notar que com o passar do tempo, a mesma só vem se valorizando, prever qual seria seu valor em um espaço curto de tempo, para saber se ainda vale a pena investir nesse ativo, ou se o melhor momento para o investimento já ocorreu é bastante interessante. Para se prever esses valores pode-se utilizar o conceito de função. Todavia, ao entrar em contato com as definições de funções, os alunos muitas vezes apresentam dificuldade na compreensão de seu significado. Essa dicotomia sinaliza a necessidade de se levar em consideração conceitos intermediários, que aliam seu uso prático e teórico. Essa vertente fortifica a utilização da área de Modelagem Matemática, já que nesta perspectiva pode ser percebida como elemento integrador entre a realidade e o conteúdo matemático a ser ensinado.

## 3 Qual a curva para melhor ajustar os valores do Bitcoin?

Nesta seção serão definidos os modelos de ajuste linear, exponencial e polinomial de grau 2, e apresentados os resultados obtidos ao ajustar os valores do preço do Bitcoin utilizando estes modelos. Essa escolha foi feita por serem funções estudadas e aprofundadas na 1ª série do Ensino Médio. A obtenção dos modelos será feita via a ferramenta interna **Linha de Tendências** do aplicativo Excel (veja a Figura 1).

Ajustar uma curva significa determinar os coeficientes da função associada a essa curva, de modo que, no intervalo de valores considerados, esta função e os dados coletados experimentalmente sejam “próximos”. Note que só podemos garantir a proximidade entre a curva ajustada e os pontos dados no intervalo onde tais pontos foram observados. Realizar previsões de valores futuros utilizando estes modelos, que é o principal objetivo de uma modelagem, sempre trará embutida uma porcentagem de erro, nem sempre se confirmando em um resultado satisfatório. De qualquer forma, os modelos conduzidos nesse intervalo limitado são fundamentais para o processo. Os modelos que serão utilizados neste trabalho são: ajuste linear, ajuste exponencial e ajuste quadrático.

### Definição 3.1.

- Um ajuste é linear se for da forma de uma função linear  $f(x) = ax + b$  onde  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- Um ajuste exponencial pode ser escrito como uma função exponencial,  $f(x) = be^{ax}$ ,  $b > 0$  e  $a \in \mathbb{R}$ .
- Um ajuste quadrático é uma parábola na forma  $y(x) = a + bx + cx^2$  onde  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$ .

<sup>5</sup>Blockchain é um livro contábil distribuído, cujas cópias são compartilhadas por uma rede voluntária de computadores. "Possuir um Bitcoin simplesmente significa ter a capacidade de transferir o controle para outra pessoa, criando um registro da transferência na Blockchain."

Assim, devemos encontrar os valores dos parâmetros ( $a$ ,  $b$  e  $c$ ) condizentes com os dados observados. Um dos métodos mais usados para estimação dos parâmetros de uma função é o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)[1, p.57], com o qual podemos ajustar as curvas desejadas.

**Definição 3.2.** *Considere um conjunto de  $n$  dados observados  $\{(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\}, i = 1, 2, 3, \dots, n$  e uma função  $y(x) = f(x, a_1, a_2, \dots, a_j)$ , onde  $a_j$  ( $j = 1, 2, \dots, j$ ) são parâmetros. O **Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)** consiste em determinar estes parâmetros de modo que se minimize o valor de*

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i, a_1, a_2, \dots, a_j) - \bar{y}_i]^2, \quad (1)$$

isto é, deve-se minimizar a soma dos quadrados dos desvios entre os valores  $\bar{y}_i$  observados e os valores ajustados  $y_i = f(\bar{x}_i, a_1, a_2, \dots, a_j)$ .

Quando se realiza um ajuste para relacionar duas variáveis, não sabemos inicialmente se o modelo encontrado é, de fato, o melhor. Um dos critérios mais utilizados para verificar a existência e o grau de relação entre as variáveis é o coeficiente de determinação,  $R^2$ . O Coeficiente de determinação é o quadrado do coeficiente de correlação amostral  $R$ . Um conjunto de dados tem  $n$  valores chamados de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , cada um associado a um ajuste  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Defina os resíduos como  $e_i = x_i - y_i$ .

Se  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  então a variabilidade do conjunto de dados pode ser medida com duas fórmulas de soma de quadrados:

- A soma dos quadrados dos resíduos:  $SS_{res} = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i$ .
- A soma total dos quadrados (proporcional à variância dos dados):  $SS_{tot} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .

**Definição 3.3.** *O Coeficiente de determinação tem sua definição mais geral como:*

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}} \quad (2)$$

Num contexto de um modelo de regressão linear simples, em que a variável explanatória (ou preditora) é  $x$  e a variável resposta (ou a prever) é  $y$ , o coeficiente de determinação  $R^2$  dá a porcentagem de variabilidade dos  $y$ 's (variável a prever) que fica explicada em função da variabilidade dos  $x$ 's. Assim, um valor de  $R^2 \approx 1$  significa que, em princípio, a nuvem de pontos apresentada no diagrama de dispersão está próxima da reta de regressão, considerada para o modelo de regressão. Quando  $R^2 \approx 0$  já não se vislumbra uma estrutura linear [8].

Embora esta medida, como dito anteriormente, seja normalmente utilizada como uma indicação da adequação do modelo de regressão ao conjunto de pontos inicialmente dado, ela deve ser usada com precaução, pois nem sempre um valor de  $R^2$  grande (próximo de 1) é sinal de que um modelo esteja a ajustar bem os dados. Do mesmo modo, um valor baixo de  $R^2$ , pode ser provocado por um outlier, enquanto a maior parte dos dados se ajustam razoavelmente bem a uma reta. Uma visualização prévia dos dados num diagrama de dispersão é fundamental.

Neste trabalho, utilizaremos o coeficiente de determinação para compararmos as curvas encontradas e determinar entre elas qual é a melhor.

Nos ajustes calculados, para os valores  $\bar{x}_i$  foi considerado o intervalo entre os dias 22/08/2020 até 21/08/2021, totalizando 365 dias. Para  $\bar{y}_i$  foram associados os valores do preço do Bitcoin nesses respectivos dias, às zero horas, medidos na moeda Real brasileira [6]. A Figura 2(a) mostra a nuvem de dispersão desse levantamento. Para as modelagens de ajuste, foi utilizado o aplicativo

Excel e sua ferramenta intitulada **Linha de Tendência** (veja Figura 1). Essa ferramenta calcula o ajuste que minimiza os erros quadráticos (1) e pode ser facilmente utilizada em turmas de ensino médio em processo de aprendizado do conteúdo “funções” em sua grade curricular.

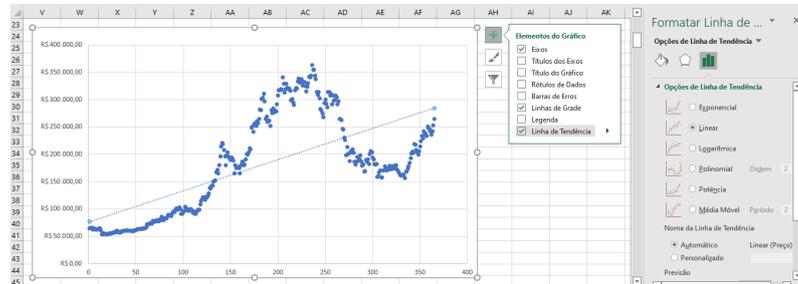


Figura 1: Ferramenta Linha de Tendência do aplicativo Excel. Fonte: próprios autores.

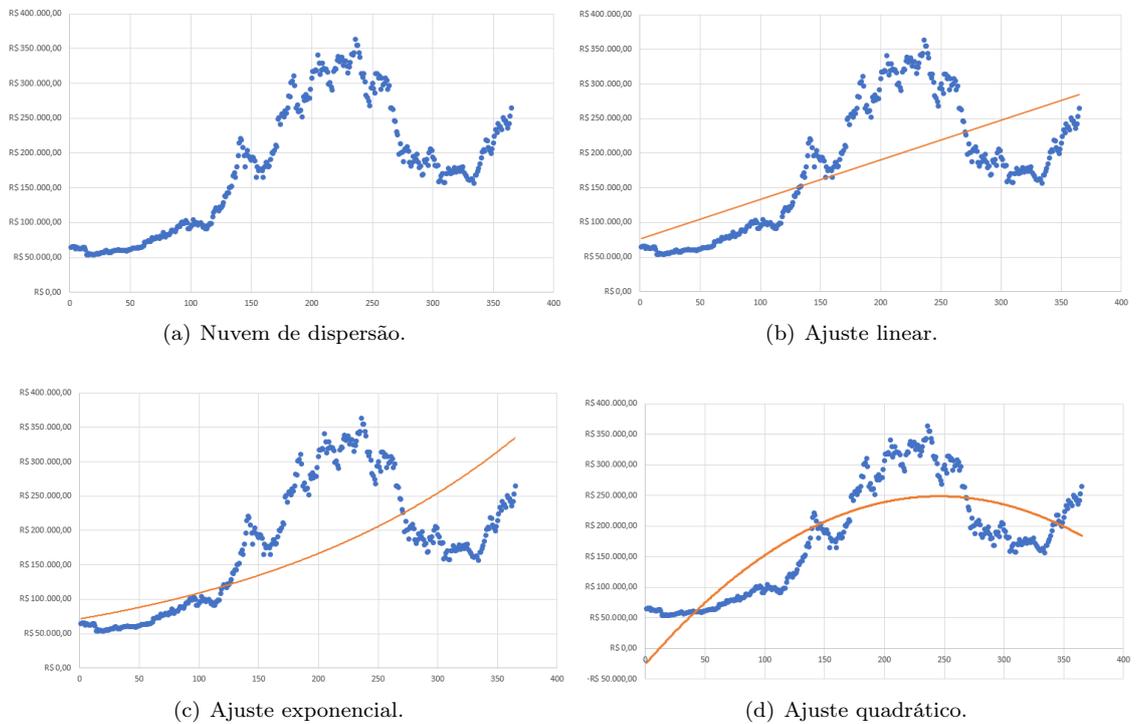


Figura 2: Nuvem de dispersão dos valores da moeda Bitcoin durante o intervalo 22/08/2020 a 22/08/2021 avaliado comparada com os ajustes (b) linear, (c) exponencial e (d) quadrático calculados. Fonte: próprios autores.

No caso do ajuste linear, encontra-se a reta (ver Figura 2(b)):

$$f(x) = 569,21x + 76500. \tag{3}$$

Esta função possui  $R^2 = 0,4396$ . Esse valor demonstra que o modelo está distante de se

encaixar aos dados observados nesse intervalo. Já para o ajuste exponencial, encontramos a função

$$f(x) = be^{ax} = 71404,53606 e^{0,0042386237x}, \quad \text{para } x \geq 0. \quad (4)$$

O ajuste exponencial (ver Figura 2(c)) possui  $R^2 = 0,3019$ . Esse valor demonstra que o modelo está muito distante de se encaixar aos dados observados nesse intervalo. Se comparada ao ajuste linear de  $R^2 = 0,4396$ , pode-se inferir que os valores ajustados estão mais longe dos valores observados. É interessante observar que, no início do intervalo analisado, o modelo se aproxima razoavelmente bem dos dados observados, porém após o 120º dia os valores ajustados estão muito longe dos valores esperados. Como o MMQ utiliza a menor soma dos desvios em todo o intervalo, e este é muito discrepante, o modelo encontrado tende a procurar valores mais próximos da mediana.

Já o modelo quadrático diferencia dos dois anteriores por possuir pontos críticos (máximos ou mínimos locais) para a variável independente  $y$  em um intervalo limitado de variação  $x$ . A função quadrática ajustada (ver Figura 2(d)) é dada por

$$f(x) = -4,543x^2 + 2231,9x - 25203. \quad (5)$$

Nesse caso, a função possui  $R^2 = 0,6883$ . Esse valor sinaliza que os modelos polinomiais sejam melhores para modelar os valores reais do problema, porém o quadrático ainda está distante do desejado. Vale ressaltar que mesmo tendo o melhor  $R^2$  dentre os três ajustes trabalhados, o início do ajuste quadrático possui valores negativos, o que não faz sentido algum para o problema de modelar o valor da moeda Bitcoin.

## 4 Preço da moeda no futuro

Um dos maiores propósitos ao encontrar uma função que ajusta dados observados em um determinado problema é conseguir a partir destes estudos prever o futuro. Assim, com as funções de ajustes calculadas, é possível calcular valores futuros, que estão fora do intervalo dos dados modelados, entre agosto de 2020 a agosto de 2021, e saber se a diferença de preço especulado é muito distante do valor que de fato ocorreu naquele dia. Como a proposta era usar como critério de medida o coeficiente de determinação  $R^2$ , dentre os três ajustes calculados na seção anterior o modelo quadrático é o escolhido. Para que o modelo possa ter maior chance de encontrar bons resultados é recomendável escolher os dias mais próximos logo após o fim da base de dados. Assim, serão utilizados nesta análise os dias do período de 23/8/2021 até 28/8/2021 e os resultados são apresentados na Tabela 1. Em média, temos que o valor encontrado pela modelagem é 31% menor do que aquele apresentado efetivamente no dia.

Tabela 1: Comparação entre os preços do Bitcoin

Dias	Preço do dia [6]	Ajuste quadrático
22/08/2021	R\$ 263.189,02	R\$ 183.110,29
23/08/2021	R\$ 264.992,56	R\$ 182.012,17
24/08/2021	R\$ 266.479,27	R\$ 180.904,97
25/08/2021	R\$ 251.534,78	R\$ 179.788,68
26/08/2021	R\$ 255.448,94	R\$ 178.663,30

## 5 Considerações Finais

Após a obtenção dos ajustes, que podem ser trabalhados com a turma do 1º ano do Ensino Médio, concluímos que o modelo quadrático é o melhor utilizando o coeficiente de determinação

como comparação. Porém, ainda está distante de conseguir prever o valor do preço no futuro de uma forma satisfatória. Isso é motivado pelo fato de possuírem os dados observados uma grande variabilidade, justificando assim utilizar modelos não-lineares para conseguir melhores ajustes. De qualquer forma, esta proposta se apresenta satisfatória para ser utilizada com as turmas do ensino médio por envolver um tema atual e, aliado com o aplicativo *Excel*, de fácil obtenção dos cálculos.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Referências

- [1] R. Bassanezi. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**. Editora Contexto, 2002. ISBN: 8572442073.
- [2] Bit2me. **Preço histórico do Bitcoin**. Online. Acessado em 23/12/2021, <https://academy.bit2me.com>.
- [3] C. E. Carvalho et al. “Bitcoin, Criptomoedas, Blockchain: Desafios analíticos, reação dos bancos, implicações regulatórias”. Em: **Fórum Liberdade Econômica** (2017).
- [4] U. D’Ambrosio. **Dos fatos reais à modelagem: uma proposta de conhecimento matemático**. Online. Acessado em 09/01/2022, <http://vello.sites.uol.com.br/modelos.htm>.
- [5] U. D’Ambrosio. “Matemática, ensino e educação: Uma proposta global”. Em: **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática** (1991), p. 16.
- [6] Infomoney. **Cotações da Moeda Bitcoin no gráfico**. Online. Acessado em 22/08/2021, <https://www.infomoney.com.br/cotacoes/cripto/ativo/bitcoin-btc/grafico/>.
- [7] J. P. Malar. **Criação de criptomoedas se tornou mais simples e pode ocorrer em horas; entenda**. Online. Acessado em 03/02/2022, <https://www.cnnbrasil.com.br/business/criacao-de-criptomoedas-se-tornou-mais-simples-e-pode-ocorrer-em-horas-entenda/>.
- [8] D. C. Montgomery e D.C. Runger. **Applied statistics and probability for engineers**. 6<sup>a</sup>. John Wiley Sons, 2013, p. 811.
- [9] S. Nakamoto. **A peer-to-peer eletronic cash system**. Online. Acessado em 07/12/2021, <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>.
- [10] E Rikwalder. **A matemática por trás do Bitcoin**. Online. Acessado em 20/12/2021, <https://pt.bitcoinonair.com/math-behind-bitcoin>.
- [11] A. Sierpinska. **The concept of function**. Math. Ass. of Amer, 1992. ISBN: 0883850818.
- [12] L. G. D. Silva. “A regulação do uso de criptomoedas no Brasil”. Dissertação de mestrado. Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2017.
- [13] R. M. Spolador. “Precisamos falar de Bitcoin!” Em: **Encontro de Iniciação Científica do Centro Universitário Antonio Eufrásio de Toledo de Presidente Prudente** (2017).
- [14] F. Ulrich. **Bitcoin: A moeda na era digital**. LVM Editora, 2017. ISBN: 8581190766.