Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Análise de existência e comportamento de onda viajante para equações de Euler com relaxação

Eduardo Abreu, **Abel Alvarez Bustos***,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC, UNICAMP,
13083-859, Campinas, SP
E-mail: eabreu@ime.unicamp.br, abelalv@ime.unicamp.br,

Wanderson José Lambert
UFRRJ - Departamento de Matemática
Campus Seropédica
23890-000, Seropédica, RJ
E-mail: wjlambert@ufrrj.br.

Resumo: *Neste trabalho estudamos um sistema de equações de Euler com relaxação generalizada. O sistema modelo de equações de Euler admite ainda um desacoplamento para sua solução. Inicialmente resolvemos o sistema como um problema de Riemann e aplicamos uma regularização a fim de tornar a solução de classe* $\mathcal{C}^1$. *O sistema geral resultante deste procedimento é resolvido via técnica de curvas características. Mais do que isso, introduzindo um parâmetro* β *com base na modelagem física, estudamos condições para a existência de onda viajante, além de analisar a relação entre as escalas físicas da difusão e de relaxação.*

Palavras-chave: *Sistema incompressível de equações de Euler com relaxação generalizada, solução de Riemann, onda viajante e perfil viscoso.*

1 Introdução

Estamos interessados em analisar a existência de choques com perfil viscoso para o seguinte sistema de equações de Euler com relaxação generalizada, via um parâmetro de velocidade β,

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\rho\\ m\\ E\end{bmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}m\\ \frac{m^2}{\rho}+a^2\rho\\ (\beta E+p)u\end{bmatrix}=\frac{1}{\epsilon}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ (\overline{E}(\rho,\rho u)-E)\end{bmatrix}, \tag{1}$$

no qual ρ é a densidade, m o momento linear, p a pressão e E a energia. β é um parâmetro que introduzimos para estudar a existência, ou não, de onda viajante dentro da solução, mas que tem uma justificativa física para o modelo em questão [6]. A quantidade $\overline{E}(\rho,\rho u)$ é vista como a energia necessária para trazermos a temperatura T para uma temperatura de referência $\overline{T}$ sem nenhuma mudança no momento ou energia do gás. Considerando a equação de estado para gases ideais politrópicos, a pressão pode ser escrita como (veja [4]) $p = R\rho\overline{T} = a^2\rho$, no qual $a\sqrt{R\overline{T}}$ é a velocidade do som. A energia de referência é escrita como $\overline{E}(\rho,\rho u) = \frac{a^2\rho}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho u^2$. O termo ϵ representa o chamado *tempo de relaxação*, que está associado ao tempo em que a energia E está longe da energia de equilíbrio $\overline{E}(\rho,\rho u)$. Do ponto de vista prático, apesar desse tempo ser bastante pequeno, ele é diferente de zero. Como estamos interessados em analisar a existência de ondas viajantes, e perfis viscosos, é útil que resolvamos o problema de Riemann associado

*Bolsista de doutorado FAPESP - Processo FAPESP 11/23628-0 a este sistema, veja [2]. O problema de Riemann em questão consiste de (1) em conjunto das condições iniciais especiais:

$$\begin{cases} (m_l, \rho_l, E_l), & \text{se} \;\; x < 0, \\ (m_r, \rho_r, E_r), & \text{se} \;\; x > 0, \end{cases} \tag{2}$$

ou seja, condições que são constantes por partes.

Na Seção 2 descrevemos a solução do problema de Riemann (1)-(2), bem como uma regularização necessária para obtermos uma aproximação global da solução. Em seguida, na Seção 3, analisamos as condições sobre o parâmetro β para a existência de onda viajante.

2 Solução do Problema de Riemann

O sistema (1) tem uma peculiaridade bastante interessante. As duas primeiras equações para a densidade ρ e o momento m não dependem da energia. Dessa forma, podemos desacoplá-lo inicialmente em um sistema (hiperbólico) 2×2 de leis de conservação, como segue:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \rho \\ m \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} m \\ m^2/\rho + a^2\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a \equiv \text{constante}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{3}$$

e com dados iniciais de (2), tais que,

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \rho_l, & \text{se } x \leq 0, \\ \rho_r, & \text{se } x > 0, \end{cases} \qquad m(x,0) = \begin{cases} m_l, & \text{se } x \leq 0, \\ m_r, & \text{se } x > 0. \end{cases} \tag{4}$$

No presente trabalho, vamos analisar em detalhes o caso apenas em que $\rho_l > \rho_r$ e $m_l > m_r$. Entretanto, a análise para todos os demais possíveis casos segue diretamente da mesma técnica aqui desenvolvida. É fácil de ver que (3) é estritamente hiperbólico, com autovalores distintos $\lambda_1 = m/\rho - a$ e $\lambda_1 = m/\rho + a$. O subsistema (3)-(4) tem como solução (ver, e.g., [2]),

$$\rho = \begin{cases} \rho_l, & x < t\,\lambda_1(\rho_l, m_l), \\ \rho(\frac{x}{t}), & t\,\lambda_1(\rho_l, m_l) \leq x < t\,\lambda_1(\rho_m, m_m), \\ \rho_m, & t\,\lambda_2(\rho_m, m_m) \leq x < t\,s, \\ \rho_r, & t\,s \leq x, \end{cases} \quad m = \begin{cases} m_l, & x < t\,\lambda(\rho_l, m_l), \\ m(\frac{x}{t}), & t\,\lambda(\rho_l, m_l) \leq x < t\,\lambda(\rho_m, m_m), \\ m_m, & t\,\lambda(\rho_m, m_m) \leq x < t\,s, \\ m_r, & t\,s \leq x, \end{cases} \tag{5}$$

no qual (ρ_m, m_m) é um estado intermediário, $s = \dfrac{m_r - m_l}{\rho_l - \rho_r}$ é a velocidade do choque e

$$\rho\left(\frac{x}{t}\right) = \rho_l exp\left\{-\left(\frac{x}{t} - \eta_l\right)/a\right\}, \qquad m\left(\frac{x}{t}\right) = \rho_l\left(\frac{x}{t} + a\right) exp\left\{-\left(\frac{x}{t} - \eta_l\right)/a\right\}. \tag{6}$$

A solução (5) de (3)-(4) consiste de um estado constante (ρ_l, m_l), seguida por uma rarefação $(\rho(x/t), m(x/t))$, depois por um estado constante (ρ_m, m_m), seguido por um choque de velocidade s conectando (ρ_m, m_m) a (ρ_r, m_r); veja a Figura 1. A solução dada por (5), torna-se apenas uma função de x e t no plano $x - t$. Como estratégia para encontrar a solução podemos utilizar a técnica das características para calcular a solução da $E = E(x,t)$ (ver, e.g., [3]). Entretanto, para podermos aplicar a técnica das curvas características, precisamos resolver um conjunto de equações diferenciais ordinárias para fluxos contínuos, o que não é o caso pois tanto m quanto ρ apresentam descontinuidades ao longo do eixo x. Por outro lado, podemos supor por um momento que $\rho = \rho(x,t)$ e $m = m(x,t)$ são suficientemente suaves. Assim, por meio da equação para a energia em (1) podemos escrever:

$$E_t + E_x\frac{\beta m}{p} = -E\left(\left[\frac{m}{p}\right]_x + \frac{1}{\epsilon}\right) + \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{a^2 p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{p}\right) - [m]_x\,, \tag{7}$$

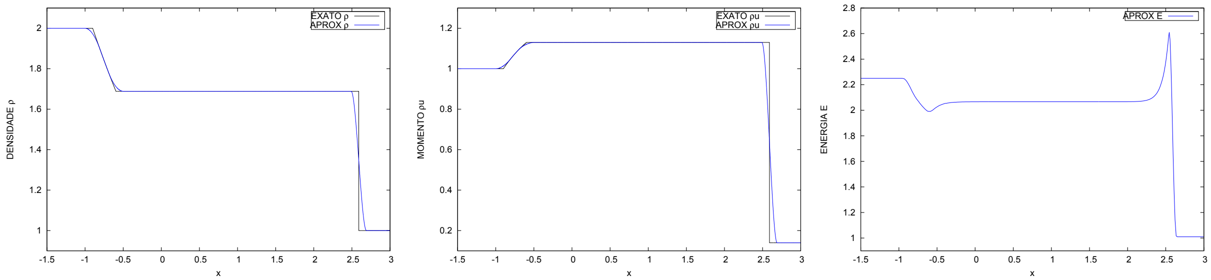

Figura 1: Soluções para ρ (esquerda) e m (centro), e suas respectivas aproximações. À direita encontra-se a solução para a energia E. Note que ocorre um pico justamente nesta solução. Usamos $(\rho_l, m_l) = (2, 1)$ e $(\rho_r, m_r) = (1, 0.13)$ e tempo de impressão da solução $t = 1.8$.

com $E(x, 0) = E_l$, se $x < 0$ e $E(x, 0) = E_l$, se $x > 0$. A solução sobre as características fica,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\beta m}{p}, \qquad \frac{dE}{dt} = -E\left(\left[\frac{m}{p}\right]_x + \frac{1}{\epsilon}\right) + \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{a^2 p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho_\tau}\right) - [m]_x\,, \tag{8}$$

com condições iniciais,

$$x(0) = x_i, \quad \text{com} \quad E(x, 0) = E_l, \quad \text{se} \quad x < 0 \quad E(x, 0) = E_l, \quad \text{se} \quad x > 0. \tag{9}$$

Como a solução 5 exibe descontinuidades nos choques e não é diferenciável nos pontos iniciais e finais das rarefações, precisamos regularizar as soluções ρ e m a fim de conseguirmos resolver o sistema (8)-(9). Vamos encontrar funções $\rho_\tau, m_\tau \in C^1(\mathcal{R})$, dependendo de um parâmetro τ de modo que se $\tau \to 0$ então ρ_τ, m_τ convergem para ρ e m dados por (5). Essa convergência é considerada na norma L^p para qualquer $1 \leq p$.

Para buscar tais funções, procuramos polinômios que são suaves na vizinhança de ρ, os quais dependem de τ. Para o ponto $t\lambda_1(\rho_l, m_l)$ é necessário um polinômio de terceiro grau da forma $p(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$, $z \in [t\lambda_1(\rho_l, m_l) - \tau, t\lambda_1(\rho_l, m_l) + \tau]$, com as seguintes propriedades, para $\lambda_{1,l} = \lambda_1(\rho_l, m_l)$ e $\lambda_{1,m} = \lambda_1(\rho_m, m_m)$, talque:

$$p_1(t\lambda_{1,l} - \tau, t) = \rho_l, \quad p_1'(t\lambda_{1,l} - \tau, t) = 0, \quad p_1(t\lambda_{1,m} + \tau, t) = \rho_m, \quad p_1'(t\lambda_{1,m} + \tau, t) = \rho'(x/t). \tag{10}$$

Para obter a solução de (10), resolve-se um sistema linear 4×4 [1] para descobrir o único polinômio com coeficientes a_0, a_1, a_2 e a_3. Por meio de cálculos similares conseguimos regularizar o problema e encontrar soluções aproximadas, que dependem do parâmetro τ (ver [1]):

$$\rho_\tau = \begin{cases} \rho_l, & \text{se } x < t\lambda_{1,l} - \tau, \\ p_1(x), & \text{se } t\lambda_{1,l} - \tau \leq x < t\lambda_{1,l} + \tau, \\ \rho(\frac{x}{t}), & \text{se } t\lambda_{1,l} + \tau \leq x < t\lambda_{1,m} - \tau, \\ p_2(x), & \text{se } t\lambda_{1,m} - \tau \leq x < t\lambda_{1,m} + \tau,, \\ \rho_m, & \text{se } t\lambda_{1,m} + \tau \leq x < ts - \tau, \\ p_3(x), & \text{se } ts - \tau \leq x < ts + \tau, \\ \rho_r, & \text{se } ts + \tau \leq x, \end{cases} \quad m_\tau = \begin{cases} m_l, & \text{se } x < t\lambda_{1,l} - \tau, \\ q_1(x), & \text{se } t\lambda_{1,l} - \tau \leq x < t\lambda_{1,l} + \tau, \\ m(\frac{x}{t}), & \text{se } t\lambda_{1,l} + \tau \leq x < t\lambda_{1,m} - \tau, \\ q_2(x), & \text{se } t\lambda_{1,m} - \tau \leq x < t\lambda_{1,m} + \tau, \\ m_m, & \text{se } t\lambda_{1,m} + \tau \leq x < ts - \tau, \\ q_3(x), & \text{se } ts - \tau \leq x < ts + \tau, \\ m_r, & \text{se } ts + \tau \leq x. \end{cases} \tag{11}$$

Na Figura 1, descrevemos a solução e o formato das regularizações da solução, Substituímos (11) dentro de (8)-(9) e obtemos, como solução

$$E(\tau) = \exp(-\tau/\epsilon + 1)E_0 + \exp(-\tau/\epsilon)\int_0^\tau \exp(s/\epsilon)\left[\frac{1}{\epsilon}\left(\beta\rho + \frac{m^2}{2\rho}\right) - m_x\right] ds, \tag{12}$$

onde $\eta = x/t$, $\rho(\eta) = \rho_l \exp\{-(\eta - \eta_l)/a\}$ and $m(\eta) = \rho_l(\eta + a)\exp\{-(\eta - \eta_l)/a\}$. Na Figura 1, exibimos a solução de E para um valor de $\beta = 1$. Apesar da mudança da solução induzida

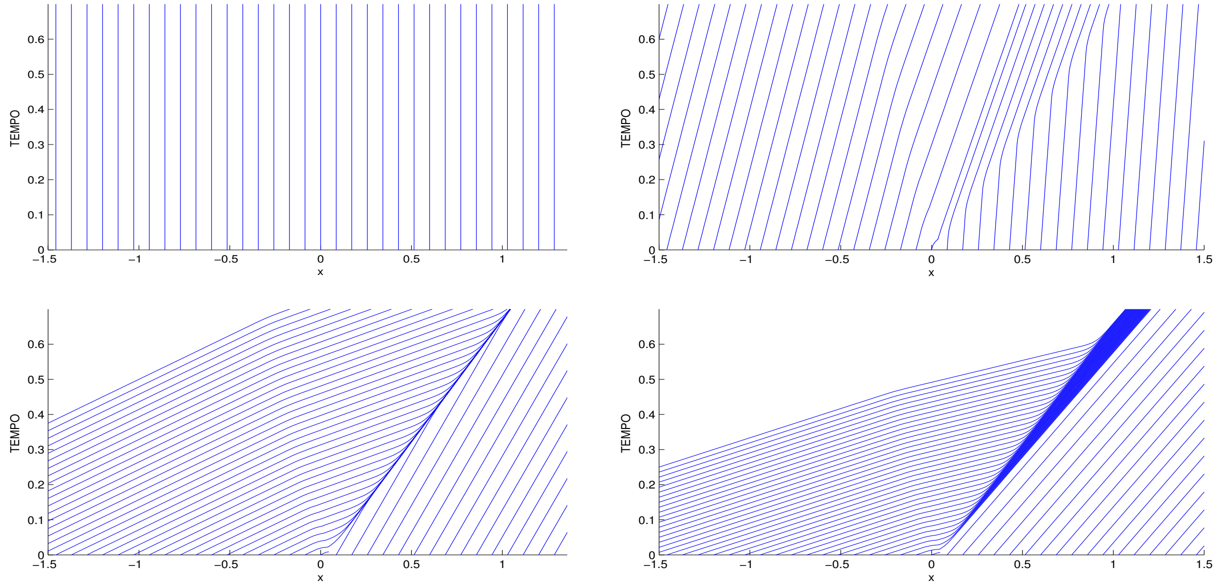

Figura 2: **Esquerda Acima:** Curvas características paralelas para $\beta = 0$. **Direita acima:** ($\beta = 1$) Note que há uma região parecida como um leque de rarefação, após a curva saindo de $x = 0$. A curva de choque de velocidade s do sistema (ρ, m) irá atravessar as características influenciando a solução da energia E: a solução não exibirá perfil viscoso neste caso. **Esquerda Abaixo:** ($\beta = 8$) Observe que as curvas características "parecem" todas colidir (o que não acontece, de fato, devido à unicidade da solução para as curvas características no plano $x-t$): a solução exibe perfil viscoso. Aqui a curva de choque atravessa a solução das curvas características fazendo a solução se acumular em torno do choque s. **Direita abaixo:** ($\beta = 12$) Comportamento parecido com o caso anterior. Entretanto, as curvas se acumulam mais rapidamente: aqui a solução também exibe um perfil viscoso.

pela variação do parametro β, como veremos na próxima seção, temos que qualitativamente *visualmente* a solução não se altera substancialmente. Neste contexto, uma análise bastante relevante é considerar as curvas características para diferentes valores de β, o que fazemos na Figura 2. Note que quando os valores de β aumentam, as curvas de onda vão se inclinando até quase se colapsarem no plano $x - t$.

3 Condições para a existência da onda viajante

A solução dada por (11)-(12) é uma solução que reflete o comportamento qualitativo de (1)-(2). É verdadeiramente incomum a existência de uma variação tão abrupta na solução. De fato, isso ocorre devido ao fato de existir variações abruptas da variável m; note que sua derivada aparece de forma explícita no lado direito de (8). Entretanto, um questionamento bastante natural é: *qual é a natureza desse onda ?* Observamos por meio de várias simulações numéricas [1], que tal onda não modifica seu perfil ao longo da evolução para *tempos longos* (comportamento assintótico). Dessa forma, é igualmente natural questionar seria esta uma *onda viajante* (ver, e.g., [2]).

A onda viajante é uma das inúmeras técnicas utilizadas para selecionar os choques que são fisicamente viáveis [2, 5]. A existência da onda viajante é uma das principais ferramentas de análise em problemas envolvendo leis de conservação para dizer se um choque, de fato, provém de um sistema físico. Dessa forma é natural utilizarmos tal técnica para analisarmos sob quais condições a onda contendo um pico E é uma onda viajante.

A maioria de sistemas modelando fenômenos físicos exibe *difusão* devido a diferentes fatores influenciando o movimento dos fluidos. Para tanto, nós admitimos que o sistema possui uma difusão de ordem η, que é justificada pela natureza física do modelo de Euler com fricção e gravidade com uma equação de Darcy parabólica em meios porosos [6]. A difusão irá influenciar, principalmente, as variáveis ρ e m nas duas primeiras equações. A equação para energia possui um termo de relaxação que sob as hipóteses de condições sub-características, veja [5, 4], funciona como um termo de dissipação. De fato, o sistema (1) satisfaz as condições sub-características. Dessa forma o sistema (1) é escrito como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}m &= \eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho,\\
\frac{\partial}{\partial t}m + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m^2}{\rho} + a^2\rho\right) &= \eta\frac{\partial^2}{\partial x^2}m,\\
\frac{\partial}{\partial t}E + \frac{\partial}{\partial x}\left[\beta E\frac{m}{\rho} + a\frac{m^2}{\rho}\right] &= \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{a^2\rho}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho} - E\right).
\end{aligned}\tag{13}$$

A pergunta relevante aqui é: sob quais condições, o choque conectando (ρ_m, m_m) e (ρ_r, m_r), comporta-se como uma onda viajante? Ou seja, para uma variável $U^\eta = (\rho, m, E)$, a solução de (13) pode ser escrita em um sistema de coordenadas viajantes $\frac{x-st}{\eta}$, onde $U^\eta = U\left(\frac{x-st}{\eta}\right)$, tal que $s = \frac{m_r - m_m}{\rho_r - \rho_m}$ é a velocidade do choque. Para a nova variável η a existência do perfil viscoso, está associada a existência de uma onda conectando o estado (ρ_m, m_m, E_m) quando $\eta \longrightarrow -\infty$ até o estado (ρ_r, m_r, E_r) quando $\eta \longrightarrow +\infty$.

Substituindo $U^\eta = (\rho, m, E)$ no sistema (13) e aplicando a regra da cadeia, obtemos um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
\frac{-s}{\eta}\frac{dp}{d\xi} + \frac{1}{\eta}\frac{dm}{d\xi} &= \frac{\eta}{\eta^2}\frac{d^2\rho}{d\xi^2},\\
\frac{-s}{\eta}\frac{dp}{d\xi} + \frac{1}{\eta}\frac{dm}{d\xi}\left(\frac{m^2}{\rho} + a^2\rho\right) &= \frac{\eta}{\eta^2}\frac{d^2m}{d\xi^2},\\
-s\frac{dE}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}\left[\beta E\frac{m}{\rho} + a\frac{m^2}{\rho}\right] &= \frac{\eta}{\epsilon}\left(\frac{a^2\rho}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho} - E\right).
\end{aligned}\tag{14}$$

Integrando no intervalo $(-\infty, \xi)$ as duas primeiras equações (14) e usando o fato que $\frac{d}{d\xi}\rho$ e $\frac{d}{dm}\rho$ se anulam (pois são equilíbrios) em $-\infty$, obtemos o sistema de primeira ordem conectando equilíbrios:

$$\frac{d}{d\xi}\rho = -s\rho + m + s\rho^- - m^-,\tag{15}$$

$$\frac{d}{d\xi}m = -sm + \frac{m^2}{\rho} + a^2\rho + sm^- - \left(\frac{m^2}{\rho}\right)^- - a^2\rho^-,\tag{16}$$

$$\frac{d}{d\xi}E = \frac{1}{\left(-s + \beta\frac{m}{\rho}\right)}\left[-E\left(\frac{\eta}{\epsilon} + \beta\frac{d}{d\xi}\left(\frac{m}{\rho}\right)\right) - a\frac{d}{d\xi}\left(\frac{m^2}{\rho}\right) + \frac{\eta}{\epsilon}\left(\frac{a^2\rho}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho}\right)\right].\tag{17}$$

Escrevendo $V = (\rho, m, E)^T$ e $F(V) = (F_1(V), F_2(V), F_2(V))^T$, com os $F_i(V)$ em cada um dos 3 lados direitos de (15). O sistema (15) é escrito na forma vetorial como $\frac{dV}{dt} = F(V)$. Note que os pontos (p_m, m_m, E_m) e (p_r, m_r, E_r) onde $E_m = \frac{a^2\rho_m}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\frac{m_m^2}{\rho_m}$ e $E_r = \frac{a^2\rho_r}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\frac{m_r^2}{\rho_m r}$, respectivamente, são pontos de equilíbrio, o qual nos motiva fazer um estudo em torno desses equilíbrios. Para tanto, linearizamos o sistema $\frac{dV}{dt} = F(V)$. Os autovalores associados a esta linearização são $\lambda_1 = -s + \frac{m^-}{\rho^-} - a$, $\lambda_2 = -s + \frac{m^-}{\rho^-} + a$ e $\lambda_3 = \frac{\frac{\eta}{\epsilon} + \beta\frac{d}{d\xi}\left(\frac{m}{\rho}\right)}{s - \beta\frac{m}{\rho}}$. Além disso, observe que os dois primeiros autovalores não dependem de E. Então podemos desacoplar o sistema (15)

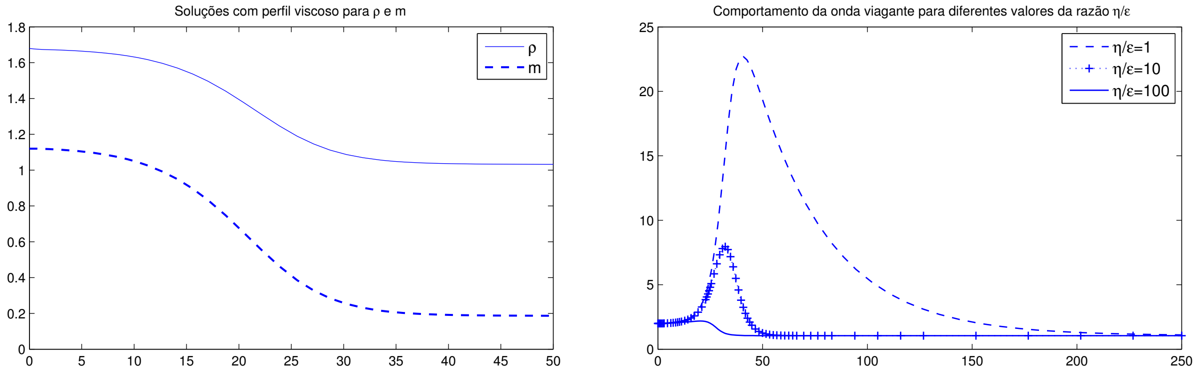

Figura 3: **Esquerda**. Perfil viscoso para as variáveis (ρ, m). Os estados dos equilíbrios sendo conectados são $(\rho_m = 1.68, m_m = 1.12)$ e $(\rho_r = 1, m_r = 0.13)$. **Direita**. Solução da órbita conectando os equilíbrios E_m e E_r para diferentes relações entre η/ϵ.

-(17) em nossa análise para a existência de conexão de órbitas ligando equilíbrios no plano (ρ, m) e depois realizar um análise para a variável energia E. Para o equilíbrio em (ρ_m, m_m) é possível mostrar que o equilíbrio é do tipo sela, de modo que a dimensão do espaço repulsor é 1. Para o equilíbrio em (ρ_r, m_r) é possível mostrar que o ponto de equilíbrio é um atrator, gerando um espaço de dimensão 2. Observe, que neste caso o espaço de conexão ligando os equilíbrios será 3. Isto, tipicamente acontece, com choques do tipo Lax. A existência dessa conexão é conhecida e pode ser encontrada em [2], veja também a Figura 3.

Estamos interessados, entretanto, em analisar a existência de uma órbita conectando os estados E_r até E_m. Observe, via equação (15), que o comportamento qualitativo da solução da EDO acompanhará, principalmente, o sinal do coeficiente multiplicando E. Ou seja, $-\dfrac{\eta/\epsilon + \beta\frac{d}{d\xi}(m/\rho)}{(-s + \beta(m/\rho))}$. Por outro lado, por meio da Figura 3 (e analiticamente) podemos observar que m/ρ é constante em (ρ_m, m_m) e depois é decrescente até conectar novamente o equilíbrio em (ρ_r, m_r), então $\frac{d}{d\xi}(m/\rho) = 0$ em (ρ_m, m_m) e (ρ_r, m_r); e $\frac{d}{d\xi}(m/\rho) < 0$ para os valores em que ρ e m variam. O mesmo comportamento vale para $\frac{d}{d\xi}(m^2/\rho)$, ou seja, $\frac{d}{d\xi}(m^2/\rho)$ será zero nos equilíbrios e negativo no interior da região de conexão.

Para o comportamento global da solução, temos duas análises a serem feitas. Para a primeira análise, estudamos o caso em que $s > \beta(m/\rho)$. Por meio de (17), podemos ver que o comportamento depende fortemente da relação das escalas η/ϵ os quais podem ser subdivididas em:

(1) Razão η/ϵ, tal que inicialmente tenhamos $dE/d\xi > 0$. O sinal de $dE/d\xi$ só é positivo devido ao fato das variáveis ρ e m, e suas derivadas, serem limitadas pois tais variáveis são solução do sistema (15)-(16). Dessa forma E irá crescer até valores satisfazendo em que a derivada satisfaça $dE/d\xi = 0$, o qual é um máximo. Tal máximo é limitado e é obtido quando a função energia E iguala-se a uma relação entre as variáveis ρ e m através da seguinte relação:

$$E = \left(a\frac{d}{d\xi}\left(\frac{m^2}{\rho}\right) - \frac{\epsilon}{\eta}\left(\frac{a^2\rho}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\frac{m^2}{\rho}\right)\right)\left(\frac{\epsilon}{\eta} + \beta\frac{d}{d\xi}\left(\frac{m}{\rho}\right)\right)^{-1}. \tag{18}$$

Note que E é limitado e que se $\epsilon << \eta$, ou seja, a relaxação ocorre numa escala menor que a escala da difusão, o pico praticamente não aparece; por outro lado se $\eta >> \epsilon$, ou seja, a difusão ocorre numa escala menor do que a relaxação, o pico é mais acentuado. Após o máximo da derivada, $dE/d\xi < 0$ e portanto E vai diminuindo. Observe que o sistema não atinge mais o equilíbrio, pois $dE/d\xi < 0$ para os subsequentes valores de E, o qual tende a $-\infty$.

(2) Razão η/ϵ, tal que inicialmente tenhamos $dE/d\xi < 0$ desde o início. Por meio da EDO para E, podemos ver que neste caso não há pico e a solução diverge até $-\infty$.

Em ambos os casos acima não há órbita conectando equilíbrios. Se formos estudar mais cuidadosamente as características da Figura (2) percebemos que para valores pequenos de β, as características exibem, praticamente, um *leque* de rarefação após a curva iniciando-se em $x = 0$ (note-se que isto não é uma rarefação). Apesar disso o formato da onda E fica parecido ao de um perfil viajante, pois a relaxação atua muito fortémente e faz com que os valores dessa região tenda ao equilíbrio de modo bastante rápido. Mas note via Figura 2 que o choque atravessa as características da equação da energia E, influenciando a solução por um período de tempo longo não podendo assim exibir um perfil viajante.

Para o segundo caso, admitimos que $s < \beta(m/\rho)$. Então, pelo mesmo motivo afirmado anteriormente, temos que $dE/d\xi > 0$. Neste caso a solução para energia E irá crescer até atingir valores satisfazendo $dE/d\xi = 0$, o qual é um máximo. Tal máximo é limitado e é obtido quando a relação (18) é satisfeita. Entretanto, note a partir da Equação (17) que até o momento em que E satisfaz (18) este é um equilíbrio instável para a variável E. A partir desse momento temos $dE/d\xi < 0$. Note, entretanto, que como $(-s + \beta(m/\rho)) > 0$, então a EDO é estável, ou seja, E tende a valores limitados, quando $\xi \longrightarrow \infty$, $\frac{d}{d\xi}(m/\rho)$ e $\frac{d}{d\xi}(m^2/\rho)$ vão a zero e a solução tende ao equilíbrio. Dessa forma, existe a órbita conectando os estados.

Se olharmos para as características da Figura 2 percebemos que para valores grandes de β, as características estão muito próximas ao ponto de parecerem colidir (não colidem, devido ao teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias, ver. e.g., [3]). Neste caso as características atravessam o choque de velocidade s e a informação tem uma descontinuidade justamente nesta onda, fazendo com que o perfil de solução seja viajante, conforme solução do sistema (15)-(18), o que resumimos como:

Proposição 3.1. *O sistema de Euler* (1) *com condições do tipo* (2), *e estados* $\rho_l > \rho_r$ *e* $m_l > m_r$, *exibe uma onda conectando* E_m *e* E_l *sendo um choque com perfil viscoso viajando com velocidade* $s = (m_m - m_l)/(\rho_m - \rho_r)$, *para* $\beta > s(\rho/m)$. *Tal onda é não monotônica, possuindo um máximo satisfazendo* (18). *Caso* $\beta < s(\rho/m)$, *a onda conectando tais estados não é uma onda viajante exibindo perfil viscoso. Além disso, a altura do pico depende exclusivamente da relação entre as escalas da difusão* η *e da relaxação* ϵ.

Referências

[1] A. A. Bustos, *Sistemas de leis de balanço em problemas de dinâmica de fluidos em meios porosos: modelagem matemática e aproximação numerica*. Tese em Preparação.

[2] C. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Third Ed., Springer, 2009.

[3] F. John, *Partial Differential Equations*, Fourth Ed., Springer, c1982.

[4] R.J. Le Veque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge Texts in applied Mathematics, UK, 2002.

[5] T-P Liu, Hyperbolic conservation laws with relaxation Communications in Mathematical Physics 108(1) 153-175 1987.

[6] P. Marcati, The One-Dimensional Darcy's Law as the Limit of a compressible Euler Flow, Journal of Differential Equations, 84 (**1**), 129-146, 1990.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0027