Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Estudo de uma estratégia de recuperação da tensão para o problema da elasticidade linear quase-incompressível

Giovanni Taraschi[1], Maicon R. Correa[2]
IMECC/Unicamp, Campinas, SP
Alisson S. Pinto[3], Cristiane O. Faria[4]
IME/UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Resumo. Neste trabalhos estudamos a aplicação de uma estratégia de pós-processamento da tensão no contexto do problema da elasticidade linear próximo ao limite de incompressibilidade. A análise de convergência da estratégia é apresentada, mostrando limitantes para o erro cometido assim como as taxas assintóticas de convergência esperadas. Experimentos numéricos são realizados para verificar os resultados teóricos apresentados e avaliar a aplicabilidade da estratégia em problemas próximos ao limite de incompressibilidade. Concluímos destes experimentos que a estratégia aqui apresentada é uma alternativa viável para a aproximação da tensão em problemas quase-incompressíveis, desde que o vetor deslocamento tenha sido bem aproximado previamente.

Palavras-chave. Método de Elementos Finitos, Elasticidade Linear, Pós-processamento, Problemas quase-incompressíveis

1 Introdução

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma região planar limitada e ocupada por um corpo elástico. Assuma que a fronteira de Ω, denotada por $\partial\Omega$, seja Lipschitz contínua e esteja decomposta em $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D \cup \Gamma_N}$ com $\Gamma_D \neq \emptyset$ e $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. O problema da elasticidade linear é então dado por: Encontrar o vetor deslocamento $\boldsymbol{u}$ tal que

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{f} \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{1a}$$
$$(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}_N \quad \text{sobre} \quad \Gamma_N, \tag{1b}$$
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_D \quad \text{sobre} \quad \Gamma_D, \tag{1c}$$

onde $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ é uma função dada que descreve a carga aplicada sobre o corpo elástico, $\boldsymbol{u}_D$ e $\boldsymbol{t}_N$ são funções prescritas na fronteira que descrevem as condições de contorno de Dirichlet e Neumann respectivamente, e $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ denota a parte simétrica do gradiente de $\boldsymbol{u}$, isto é

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \nabla^s \boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^t\right).$$

As propriedades físicas do material são descritas pelo tensor de elasticidade $\boldsymbol{C}$, que age sobre o espaço $\mathbb{S}$ dos tensores 2×2 simétricos. Segue também que o tensor de elasticidade é simétrico e positivo definido.

[1] gitaraschi@gmail.com
[2] maicon@ime.unicamp.br
[3] alisson.pinto@pos.ime.uerj.br
[4] cofaria@ime.uerj.br

Na elaboração de alguns métodos numéricos para a solução de (1), é conveniente decompor a equação diferencial de segunda ordem (1a) em um sistema de primeira ordem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2a}$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f} \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{2b}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ denota o tensor de tensões e $\boldsymbol{A}$ denota o tensor inverso de $\boldsymbol{C}$. A equação constitutiva linear (2a) relaciona o deslocamento com o estado de tensões do corpo elástico no regime de pequenas deformações e é chamada de Lei de Hooke, enquanto (2b) é a equação do equilíbrio e está ligada à preservação do momento linear [1].

O problema da elasticidade linear (1) é dito homogêneo e isotrópicos quando o tensor $\boldsymbol{C}$ e seu inverso $\boldsymbol{A}$ puderem ser escritos como

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{S} = 2\mu\boldsymbol{S} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{S})\boldsymbol{I}, \quad \forall \boldsymbol{S} \in \mathbb{S}, \tag{3a}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \frac{1}{2\mu}\left(\boldsymbol{S} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \operatorname{tr}(\boldsymbol{S})\,\boldsymbol{I}\right), \quad \forall \boldsymbol{S} \in \mathbb{S}, \tag{3b}$$

onde $\boldsymbol{I}$ é o tensor identidade, tr é o operador traço e μ e λ são os coeficientes de Lamé, que por sua vez estão relacionados ao módulo de elasticidade $E > 0$ e à constante de Poisson $0 \leq \nu < 0.5$ através das equações

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{4}$$

Um problema homogêneo e isotrópico será quase-incompressível, ou próximo do limite de incompressibilidade, quando ν tende à 0.5, o que resulta em λ tender a infinito.

Em diversas aplicações práticas, além de obter aproximações para o deslocamento $\boldsymbol{u}$, é necessário também obter aproximações para o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ [1, 6]. Neste contexto, sabe-se que métodos de elementos finitos mistos [1–3, 7] podem fornecer boas aproximações, tanto para $\boldsymbol{u}$ quanto $\boldsymbol{\sigma}$, em problemas quase-incompressíveis. No entanto, estes métodos exigem a construção de espaços de aproximação para $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ que satisfaçam determinadas condições de estabilidade [1, 3], o que aumenta bastante a complexidade do problema. Em particular, a construção de espaços de aproximação estáveis para métodos mistos que imponham (de forma forte ou variacionalmente) a simetria do tensor de tensões, é um tópico atual de pesquisa [2, 7].

Uma abordagem alternativa, mais simples, para a determinação do campo de tensões é o emprego de estrategias de pós-processamento [4, 6]. Nestas estratégias parte-se de uma aproximação previamente computada $\boldsymbol{u}_h$ para o deslocamento, que é então usada para definir um novo problema (chamado de pós-processamento) para a aproximar o tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$. Comparadas aos métodos mistos, as estratégias de pós-processamento tem como uma de suas principais vantagens a flexibilidade, já que uma mesma estrategia pode ser combinada com diferentes métodos para a obtenção de $\boldsymbol{u}_h$.

Neste trabalho nos retemos à segunda abordagem, e focamos no estudo de uma estratégia de pós-processamento para a aproximação da tensão, baseada na formulação global apresentada em [6]. Nosso objetivo é avaliar o comportamento desta estratégia para problemas quase-incompressíveis, verificando se ela é capaz de encontrar boas aproximações para a tensão, uma vez conhecida uma boa aproximação $\boldsymbol{u}_h$ para o deslocamento. Destacamos aqui que obter boas aproximações para o deslocamento em problemas quase-incompressíveis não é uma tarefa trivial, e alguns métodos clássicos de elementos finitos, como o método de Galerkin Primal, falham [1, 7]. No entanto, nosso foco será apenas na robustez do pós-processamento em si e portanto assumiremos que uma boa aproximação para o deslocamento já é conhecida.

Na próxima seção descrevemos em detalhes a estratégia de pós-processamento estudada e apresentamos alguns resultados teóricos sobre sua convergência. Em seguida, na Seção 3, experimentos numéricos serão realizados para verificar os resultados teóricos apresentados anteriormente, e estudar o comportamento da estratégia para problemas quase-incompressíveis. As conclusões deste trabalho são apresentadas na Seção 4.

2 Pós-processamento da Tensão

A estratégia de pós-processamento da tensão estudada neste trabalho foi originalmente proposta no contexto mais geral de problemas elípticos em [6], e se baseia em uma combinação de resíduos de quadrados mínimos das equações constitutiva (2a) e do equilíbrio (2b). No contexto do problema da elasticidade linear, esta estratégia foi aplicada recentemente em [8], onde estudou-se o comportamento da mesma para problemas heterogêneos.

A estratégia começa pela construção de um subespaço de dimensão finita $\boldsymbol{Z}_h \subset H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M})$, onde $H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M})$ denota o espaço dos tensores $\mathbb{M}$, de dimensão 2×2, cujas entradas e divergente (tomado linha a linha) são quadraticamente integráveis. Apesar da estratégia estar bem definida para qualquer subespaço $\boldsymbol{Z}_h \subset H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M})$, neste trabalho estudamos apenas o caso em que $\boldsymbol{Z}_h$ são espaços simétricos construídos a partir de uma discretização de Ω em quadriláteros convexos K, e usando como base os polinômios interpolantes de Lagrange.

Dada uma discretização $\mathcal{T}_\mathrm{h}$ de Ω em quadriláteros convexos K, o subíndice h é chamado de parâmetro de malha e denota o máximo dos diâmetros dos quadriláteros K

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_\mathrm{h}} \{\mathrm{diam}(K)\}. \tag{5}$$

Segue também que, para cada elemento $K \in \mathcal{T}_\mathrm{h}$, existe um isomorfismo bilinear F_K tal que K é a imagem de F_K agindo sobre o elemento padrão $\hat{K} = [0,1] \times [0,1]$, isto é

$$K = F_K(\hat{K}), \quad \forall K \in \mathcal{T}_\mathrm{h}\,.$$

Considere agora, para algum inteiro $l \geq 1$, o espaço $Q_l(\hat{K}, \mathbb{S})$ dos tensores simétricos sobre $\hat{K}$ cujas entradas são polinômios de grau l em cada coordenada. Os espaços de aproximação $\boldsymbol{Z}_h$ usados neste trabalho são então definidos por

$$\boldsymbol{Z}_h = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_h^l = \{\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{S}) \,:\, \boldsymbol{\tau}|_K \in \boldsymbol{Q}_K,\, \forall K \in \mathcal{T}_\mathrm{h}\}, \tag{6}$$

onde

$$\boldsymbol{Q}_K = \{\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div}, K, \mathbb{S}) \,:\, \boldsymbol{\tau} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \circ F_K^{-1},\, \hat{\boldsymbol{\tau}} \in Q_l(\hat{K}, \mathbb{S})\}.$$

Construídos os subespaços $\boldsymbol{Z}_h$, e conhecida uma aproximação precisa $\boldsymbol{u}_h$ para o deslocamento previamente calculada, a estratégia de pós-processamento consiste em: Encontrar $\boldsymbol{\sigma}_h \in \boldsymbol{Z}_h$ tal que

$$b_\alpha(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h) : \boldsymbol{\tau}_h \,\mathrm{dx} + (\delta h)^\alpha \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau}_h \,\mathrm{dx}, \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{Z}_h. \tag{7}$$

Aqui $b_\alpha : H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M}) \times H(\mathrm{div}, \Omega, \mathbb{M}) \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear dada por

$$b_\alpha(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = \int_\Omega \boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}_h : \boldsymbol{\tau}_h \,\mathrm{dx} + (\delta h)^\alpha \int_\Omega \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau}_h \,\mathrm{dx},$$

h é o parâmetro de malha definido em (5) e $\delta > 0$ e $0 \leq \alpha \leq 2$ são parâmetros a serem escolhidos.

2.1 Análise de Convergência

A análise de convergência aqui apresentada segue os moldes da análise desenvolvida em [6], fazendo apenas as mudanças necessárias para o problema da elasticidade. Começamos destacando que a forma bilinear $b_\alpha(\cdot,\cdot)$ induz uma norma sobre $H(\mathrm{div},\Omega,\mathbb{M})$ dada por

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_\alpha = (b_\alpha(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau}))^{1/2}. \tag{8}$$

Diretamente da definição segue ainda que para todo $\boldsymbol{\tau} \in H(\mathrm{div},\Omega,\mathbb{M})$, esta norma satisfaz as seguintes desigualdades

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_\alpha \geq C\|\boldsymbol{\tau}\|_0, \tag{9a}$$

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_\alpha \geq (\delta h)^{\alpha/2}\|\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}\|_0, \tag{9b}$$

onde C é uma constante que só depende do tensor $\boldsymbol{C}$.

Note agora que a formulação (7) é consistente no sentido que é satisfeita pelas soluções exatas $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\sigma}$, isto é

$$b_\alpha(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}_h) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\tau}_h \,\mathrm{dx} + (\delta h)^\alpha \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_h \,\mathrm{dx}, \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{Z}_h. \tag{10}$$

Subtraindo (10) de (7), e usando a bilinearidade de $b_\alpha(\cdot,\cdot)$, temos também a relação

$$b_\alpha(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\tau}_h) = \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\tau}_h \,\mathrm{dx}, \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{Z}_h. \tag{11}$$

Partindo da relação (11) e das desigualdades (9), o próximo Lema estabelece a base para a análise de convergência da estratégia (7).

Lema 2.1. *Sejam $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ as soluções exatas para o deslocamento e a tensão respectivamente, $\boldsymbol{u}_h$ uma solução aproximada para o deslocamento calculada previamente, e $\boldsymbol{\sigma}_h$ a tensão aproximada obtida pela estratégia* (7). *Segue que*

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_\alpha \leq 2\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_\alpha + C\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|_0, \tag{12}$$

onde C é uma constante dependente apenas do tensor $\boldsymbol{C}$.

Demonstração. Da definição da norma $\|\cdot\|_\alpha$ e da bilinearidade de $b_\alpha(\cdot,\cdot)$ segue que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h\|_\alpha^2 = b_\alpha(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h) = b_\alpha(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h) + b_\alpha(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h),$$

Usando a relação (11), a equação acima pode ser reescrita como

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h\|_\alpha^2 = b_\alpha(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h) + \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}) : (\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h)\,\mathrm{dx}\,.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no lado direito da equação acima obtemos

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h\|_\alpha^2 \leq \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_\alpha\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h\|_\alpha + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|_0\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h\|_0.$$

Finalmente, usando a desigualdade entre as normas $\|\cdot\|_\alpha$ e $\|\cdot\|_0$ dada por (9a), segue que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h\|_\alpha \leq \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_\alpha + C\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|_0,$$

e o resultado desejado é obtido a partir da desigualdade triangular

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_\alpha \leq \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_\alpha + \|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\tau}_h\|_\alpha \leq 2\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_\alpha + C\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|_0.$$

□

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0259

Corolário 2.1. *Para o caso em que* $\boldsymbol{Z}_h = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_h^l$ *é construído de acordo com* (6)*, propriedades clássicas de aproximação [3, 5] nos dão que, para* $\boldsymbol{\sigma}$ *suficientemente regular*

$$\inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \boldsymbol{\mathcal{Q}}_h^l} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}_h\|_\alpha \leq C h^{l+\alpha/2} |\boldsymbol{\sigma}|_{l+1,\Omega},$$

onde C *é uma constante independente do parâmetro de malha* h *e* $|\cdot|_{l+1,\Omega}$ *denota a semi norma no espaço de Hilbert* $H^{l+1}(\Omega, \mathbb{M})$*. Segue assim, como consequência direta do Lema 2.1 e das desigualdades* (9)*, as seguintes estimativas em* L^2

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,\Omega} \leq C(h^{l+\alpha/2}|\boldsymbol{\sigma}|_{l+1} + \|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|_0), \tag{13a}$$

$$\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{0,\Omega} \leq C(h^l|\boldsymbol{\sigma}|_{l+1} + h^{-\alpha/2}\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h)\|_0). \tag{13b}$$

3 Experimentos Numéricos

Nesta seção realizamos alguns experimentos numéricos a fim de analisar o desempenho da estratégia de pós-processamento (7) para problemas homogêneos e isotrópicos próximos ao limite de incompressibilidade. Para isso, resolvemos o problema modelo (1) no domínio $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, com tensor de elasticidade isotrópico e homogêneo $\boldsymbol{C}$ dado de acordo com (3a) e

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \pi^2 \begin{bmatrix} (2\mu + \lambda)\cos(\pi x + \pi y) - \mu\cos(\pi x - \pi y) \\ (2\mu + \lambda)\cos(\pi x + \pi y) - \mu\cos(\pi x - \pi y) \end{bmatrix}.$$

Considerando condições de contorno homogêneas de Dirichlet, tal problema possui solução exata para o deslocamento conhecida, dada por

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \begin{bmatrix} \sin(\pi x)\sin(\pi y) \\ \sin(\pi x)\sin(\pi y) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Os coeficientes de Lamé μ e λ foram obtidos a partir do módulo de elasticidade E e da constante de Poisson ν de acordo com (4). Para estes experimentos fixamos o valor do módulo de elasticidade em $E = 1$, e estudamos três possíveis valores para a constante de Poisson $\nu = 0.5 - 10^{-1}$, $0.5 - 10^{-3}$ e $0.5 - 10^{-5}$. Note que os valores para ν são tomados progressivamente mais próximos ao limite de incompressibilidade.

Para cada um dos possíveis valores de ν, aproximações $\boldsymbol{\sigma}_h$ foram obtidas através de (7). Foram usadas discretizações de Ω em $n \times n$ quadrados com n entre 4 e 64. Os espaços de aproximação adotados foram os espaços $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_h^l$ para $l = 1$ e 2, como definido em (6).

Note que, das estimativas (13), o erro na aproximação de $\boldsymbol{\sigma}$ depende diretamente de quão bem $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_h)$ aproxima $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$, o que torna bastante difícil a análise da qualidade do pós-processamento em si, uma vez que diferentes aproximações $\boldsymbol{u}_h$ podem gerar resultados bastante diferentes na aproximação de $\boldsymbol{\sigma}$. Para evitar essa complicação, tomamos $\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}$, o que permite focar nossa análise apenas no desempenho do pós-processamento. Para este caso, as estimativas (13) indicam as seguintes taxas de convergência

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,\Omega} = \mathcal{O}(h^{l+\alpha/2}) \text{ e } \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{0,\Omega} = \mathcal{O}(h^l),$$

de onde segue que $\alpha = 2$ nos dá as melhores taxas de convergência possíveis, e foi portanto o parâmetro usado. Para o parâmetro δ tomamos $\delta = 1$.

Uma vez calculadas as soluções aproximadas $\boldsymbol{\sigma}_h$, foram medidos os erros absolutos (e.a.) e os erros relativos (e.r.), na norma L^2, cometidos nas aproximações do tensor de tensões e do seu divergente. Foram calculadas também as respectivas taxas assintóticas de convergência. Os resultados obtidos encontram-se nas Tabelas 1 à 3.

Tabela 1: Erros e taxas de convergência para o experimento $\nu = 0.49$

	$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_0$			$\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{0,\Omega}$		
n	e.a.	e.r.	taxa	e.a.	e.r.	taxa
Espaço de aproximação $Q_1(\Omega, \mathbb{S})$						
4	6.1771e+00	1.1714e-01	1.55	3.1714e+01	1.8772e-01	0.56
8	9.8779e-01	1.8732e-02	2.64	1.8427e+01	1.0907e-01	0.78
16	1.6853e-01	3.1960e-03	2.55	9.3724e+00	5.5477e-02	0.98
32	3.1475e-02	5.9688e-04	2.42	4.6945e+00	2.7787e-02	1.00
64	6.9051e-03	1.3095e-04	2.19	2.3476e+00	1.3896e-02	1.00
Espaço de aproximação $Q_2(\Omega, \mathbb{S})$						
4	3.6717e-01	6.9629e-03	3.71	3.4261e+00	2.0280e-02	1.52
8	3.1217e-02	5.9198e-04	3.56	9.2316e-01	5.4644e-03	1.89
16	3.4159e-03	6.4777e-05	3.19	2.3551e-01	1.3940e-03	1.97
32	4.1113e-04	7.7966e-06	3.05	5.9260e-02	3.5077e-04	1.99
64	5.0894e-05	9.6513e-07	3.01	1.4850e-02	8.7900e-05	2.00

Tabela 2: Erros e taxas de convergência para o experimento $\nu = 0.4999$

	$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_0$			$\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{0,\Omega}$		
n	e.a.	e.r.	taxa	e.a.	e.r.	taxa
Espaço de aproximação $Q_1(\Omega, \mathbb{S})$						
4	6.3493e+02	1.2126e-01	1.52	3.1296e+03	1.9020e-01	0.54
8	1.0749e+02	2.0528e-02	2.56	1.8281e+03	1.1110e-01	0.78
16	2.1779e+01	4.1592e-03	2.30	9.3043e+02	5.6549e-02	0.97
32	5.0486e+00	9.6414e-04	2.11	4.6609e+02	2.8328e-02	1.00
64	1.1777e+00	2.2491e-04	2.10	2.3310e+02	1.4167e-02	1.00
Espaço de aproximação $Q_2(\Omega, \mathbb{S})$						
4	3.7463e+01	7.1544e-03	3.70	3.3897e+02	2.0601e-02	1.51
8	3.1313e+00	5.9799e-04	3.58	9.1579e+01	5.5659e-03	1.89
16	3.4036e-01	6.5000e-05	3.20	2.3378e+01	1.4208e-03	1.97
32	4.0882e-02	7.8074e-06	3.06	5.8837e+00	3.5759e-04	1.99
64	5.0569e-03	9.6573e-07	3.02	1.4745e+00	8.9617e-05	2.00

Tabela 3: Erros e taxas de convergência para o experimento $\nu = 0.499999$

	$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_0$			$\|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{0,\Omega}$		
n	e.a.	e.r.	taxa	e.a.	e.r.	taxa
Espaço de aproximação $Q_1(\Omega, \mathbb{S})$						
4	6.3512e+04	1.2130e-01	1.52	3.1292e+05	1.9023e-01	0.54
8	1.0760e+04	2.0549e-02	2.56	1.8279e+05	1.1112e-01	0.78
16	2.1874e+03	4.1776e-03	2.30	9.3037e+04	5.6560e-02	0.97
32	5.1400e+02	9.8166e-04	2.09	4.6606e+04	2.8333e-02	1.00
64	1.2596e+02	2.4056e-04	2.03	2.3308e+04	1.4170e-02	1.00
Espaço de aproximação $Q_2(\Omega, \mathbb{S})$						
4	3.7471e+03	7.1565e-03	3.70	3.3893e+04	2.0604e-02	1.51
8	3.1315e+02	5.9806e-04	3.58	9.1572e+03	5.5669e-03	1.89
16	3.4036e+01	6.5003e-05	3.20	2.3376e+03	1.4211e-03	1.97
32	4.0881e+00	7.8077e-06	3.06	5.8833e+02	3.5766e-04	1.99
64	5.0567e-01	9.6575e-07	3.02	1.4744e+02	8.9634e-05	2.00

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0259

4 Conclusões e Considerações Finais

Dos experimentos numéricos realizados, verificamos que as taxas de convergência concordam em totalidade com a previsão teórica apresentada na Seção 2.1 para as três escolhas de ν consideradas. Apesar dos erros absolutos aumentarem conforme ν se aproxima de 0.5 (o que é esperado já que a norma da solução exata também aumenta), os erros relativos se mantiveram na mesma ordem de grandeza em todos os casos. Concluímos a partir disso que a estratégia de pós-processamento estuda é viável para problemas quase-incompressíveis, ao menos no caso em a solução exata para o deslocamento é usada como fonte. Inferimos então que, uma vez que $\boldsymbol{u}_h$ seja uma aproximação precisa para o deslocamento, a estratégia analisada não deve apresentar problemas ao aproximar $\boldsymbol{\sigma}$, mesmo no caso de problemas quase-incompressíveis. Como trabalho futuro pretendemos combinar o pós-processamento apresentado aqui com métodos particulares para a aproximação de $\boldsymbol{u}_h$, além de fazer comparações da estratégia proposta com outras alternativas da literatura.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq através dos processos 304192/2019-8 e 140400/2021-4; da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP pelo processo 2013/07375-0; da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] D. N. Arnold. "Mixed finite element methods for elliptic problems". Em: **Computer methods in applied mechanics and engineering** 82.1-3 (1990), pp. 281–300. DOI: 10.1016/0045-7825(90)90168-L.

[2] D. N. Arnold, G. Awanou e W. Qiu. "Mixed finite elements for elasticity on quadrilateral meshes". Em: **Advances in Computational Mathematics** 41.3 (2015), pp. 553–572. DOI: 10.1007/s10444-014-9376-x.

[3] D. Boffi, F. Brezzi e M. Fortin. **Mixed finite element methods and applications**. Vol. 44. Springer, 2013. ISBN: 978-3-642-36519-5.

[4] L. Bush, Q. Deng e V. Ginting. "A locally conservative stress recovery technique for continuous Galerkin FEM in linear elasticity". Em: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 286 (2015), pp. 354–372. DOI: 10.1016/j.cma.2015.01.002.

[5] P. G. Ciarlet. **The finite element method for elliptic problems**. SIAM, 2002. ISBN: 978-1-611972-58-0.

[6] A. F. D. Loula, F. A Rochinha e M. A. Murad. "Higher-order gradient post-processings for second-order elliptic problems". Em: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 128.3-4 (1995), pp. 361–381. DOI: 10.1016/0045-7825(95)00885-3.

[7] T. O. Quinelato, A. F. D. Loula, M. R. Correa e T. Arbogast. "Full H (div)-approximation of linear elasticity on quadrilateral meshes based on ABF finite elements". Em: **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 347 (2019), pp. 120–142. DOI: 10.1016/j.cma.2018.12.013.

[8] G. Taraschi, A. S. Pinto, C. O. Faria e M. R. Correa. "On the accuracy of finite element approximations of elliptic problems with heterogeneous coefficients". Em: **Proceedings of the Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering** (2021).

