Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Uma Solução Numérica para o Regime Saturado de Leito Fluidizado Unidimensional

Saulo Rodrigo Medrado[1]
Yuri Dumaresq Sobral[2]
Departamento de Matemática/UnB, Brasília, DF

Considere um escoamento vertical através de um conjunto de partículas sólidas, inicialmente em repouso, no fundo de um reservatório. A partir de uma variação da vazão do fluido, a força de arrasto faz com que as partículas fiquem móveis no escoamento. Neste trabalho, vamos descrever o comportamento das partículas em função das propriedades do escoamento.

De acordo com [3], as equações de continuidade da fase das partículas e da fase do fluido, respectivamente, são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (v\phi) = 0 \qquad \text{e} \qquad -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot [u(1-\phi)] = 0, \tag{1}$$

e as equações de momento da partícula de fase e do fluido de fase, respectivamente, são:

$$\phi\rho_p \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v\right) = \nabla \cdot T_p + f + \phi\left(\rho_p - \rho_f\right) g + \phi\rho_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u\right), \tag{2}$$

$$(1-\phi)\,\rho_f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u\right) = \nabla \cdot T_f - \mathbf{f} + (1-\phi)\,\rho_f g, \tag{3}$$

em que u e v são as velocidades do fluido e das partículas, respectivamente, ϕ é função de concentração de partículas no fluido, ρ_p é a densidade das partículas e ρ_f é a densidade do fluido. T_p é o tensor de tensões das partículas, a força de iteração entre o fluido e a partícula é denotada por $\mathbf{f}$ e T_f é o tensor de tensões do fluido.

Tomando o limite unidimensional destas equações podemos desconsiderar a equação de momento da fase do fluido, e assim obtemos:

$$\begin{aligned} \phi\left(\rho_p + \vartheta\rho_f\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \phi\rho_f\,(1+\vartheta)\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial_p}{\partial x} = \\ \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_p\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \beta\,(u-v) - \phi\left(\rho_p - \rho_f\right) g, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial\,(v\phi)}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

onde μ_p é a viscosidade dinâmica da fase das partículas. O coeficiente β, como definido em [4], e o coeficiente de massa virtual ϑ são dados por

$$\beta(\phi) = \frac{(\rho_p - \rho_f)}{v_t}\frac{\phi}{(1-\phi)^{n-1}} \qquad \text{e} \qquad \vartheta(\phi) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\phi}, \tag{6}$$

[1]200105639@aluno.unb.br
[2]ydsobral@unb.br

em que v_t é a velocidade terminal da partícula e n um parâmetro experimental. Neste regime a velocidade do fluido está diretamente associada à velocidade das partículas e à quantidade q:

$$q = v_t (1 - \phi_0)^n . \tag{7}$$

As observações experimentais obtidas em [1] sugerem um movimento periódico das partículas o que descreve estruturas chamadas ondas saturadas. Assim, seguindo [2], fizemos a transformação $Z = x - ct$, onde c é a velocidade de propagação das ondas saturadas. As velocidades são da forma $u(Z) = u(x,t) - c$, e $v(Z) = v(x,t) - c$, e a concentração de partículas fica $\phi(Z) = \phi(x,t)$. Com essas transformações obtivemos

$$-u\frac{d\phi}{dZ} + (1-\phi)\frac{du}{dZ} = 0 \qquad \text{e} \qquad v\frac{d\phi}{dZ} + \phi\frac{d\phi}{dZ} = 0, \tag{8}$$

$$u = \frac{q - c\phi_0}{1-\phi}, \tag{9}$$

$$\frac{4}{3}c\phi_0\frac{d}{dZ}\left[\frac{\mu_p(\phi)}{\phi^2}\frac{d\phi}{dZ}\right] + \left[F_2(\phi) - \frac{dp_p}{d\phi}\right]\frac{d\phi}{dZ} + F_1(\phi) = 0, \tag{10}$$

onde F_1 é uma função que descreve o arrasto e F_2 a inércia do sistema.

Como obtivemos um problema de autovalores, onde tanto comprimento de onda quanto a velocidade de propagação das ondas devem ser obtidos como solução do problema, foi preciso definir uma condição adicional

$$\int_0^{\lambda} \mu_p(\phi)\left[F_2(\phi) - \frac{dp_p}{d\phi}\right]\left(\frac{1}{\phi}\frac{d\phi}{dZ}\right)^2 dZ = 0, \tag{11}$$

com λ o comprimento das ondas. Dado um conjunto de parâmetros do sistema e escolhendo uma velocidade c_0 tal que a equação (11) seja satisfeita, encontramos a solução do problema. Para isto utilizamos um método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem para a equação (10), e uma regra de Simpson para verificar a condição (11). O processo é iterativo até que os valores de λ e c sejam encontrados e, com isto, obtemos o perfil de onda saturada [2].

Referências

[1] P. Duru et al. "Constitutive laws in liquid-fluidized beds". Em: **Journal of Fluid Mechanics** 452 (2002), pp. 371–404. DOI: 10.1017/S0022112001007017.

[2] Y. D. Sobral e E. J. Hinch. "Finite Amplitude Steady-State One-Dimensional Waves in Fluidized Beds". Em: **SIAM Journal on Applied Mathematics** 77.1 (2017), pp. 247–266. DOI: 10.1137/16M1084031.

[3] T. B. Anderson e R. Jackson. "A Fluid Mechanical Description of Fluidized Beds. Equations of Motion". Em: **Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals** 6.4 (1967), pp. 527–539. DOI: 10.1021/i160024a007.

[4] J. F. Richardson e W. N. Zaki. "Sedimentation and fluidization". Em: **Trans. Instn. Chem. Eng.** 32 (1954), pp. 35–52.