Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

A complexidade do número cromático orientado para subgrafos de grades

E. M. M. Coelho, H. Coelho, M. P. Ferreira[1]
UFG, Goiânia, GO
L. Faria, S. Klein
UERJ, UFRJ - Rio de Janeiro, RJ

Resumo.Seja $\overrightarrow{G} = (V, A)$ um grafo orientado e G o grafo subjacente de $\overrightarrow{G}$. Uma *k-coloração orientada* de $\overrightarrow{G}$ é uma partição de V em k partes de maneira que não existem dois vértices adjacentes pertencendo a mesma parte e todos os arcos entre um par de partes tem a mesma orientação. O *número cromático orientado* $\chi_o(\overrightarrow{G})$ de $\overrightarrow{G}$ é o menor k, tal que $\overrightarrow{G}$ admite uma k-coloração orientada. O número cromático orientado de G, denotado por $\chi_o(G)$, é o maior $\chi_o(\overrightarrow{G})$ para todas orientações $\overrightarrow{G}$ de G. Neste trabalho mostramos que decidir se $\chi_o(\overrightarrow{G}) \leq k$ é um problema NP-completo mesmo quando $\overrightarrow{G}$ é um subgrafo de uma grade.

Palavras-chave. Grafo Orientado, Número Cromático Orientado, Grafos Grade.

1 Introdução

Dados M e N dois inteiros positivos, uma *grade* $G_{M\times N}$ tem o conjunto de vértices $V(G_{M\times N}) = \{(i,j) : i \in \{1,2,\ldots,M\}, j \in \{1,2,\ldots,N\}\}$ e o conjunto de arestas $E(G_{M\times N}) = \{(i,j)(k,l) : |i-k| + |j-l| = 1, (i,j),(k,l) \in V(G_{M\times N})\}$. Sabemos que dado um grafo G, reconhecer se G é um subgrafo de uma grade é um problema NP-completo mesmo se G é uma árvore [1]. Dessa forma, quando dissermos que um grafo $G = (V, E)$ é um subgrafo de uma grade tanto os vértices de V, quanto as arestas de E estarão codificados de acordo com a definição da grade da qual G é subgrafo. Apesar do reconhecimento de subgrafos de grades ser difícil, dado um grafo planar $G = (V, E)$ com $n = |V|$, existe um algoritmo polinomial [4] que encontra uma subdivisão de G como subgrafo de uma grade $G_{M\times N}$ tal que $\max\{M, N\} \leq n^3$.

Uma *k-coloração orientada* é definida pela função $\phi_{\overrightarrow{G}}$: $V(\overrightarrow{G}) \to \{1,2,\ldots,k\}$, tal que se $xy \in A(\overrightarrow{G})$, então $\phi_{\overrightarrow{G}}(x) \neq \phi_{\overrightarrow{G}}(y)$ e se xy, $zt \in A(\overrightarrow{G})$ e $\phi_{\overrightarrow{G}}(y) = \phi_{\overrightarrow{G}}(z)$ então $\phi_{\overrightarrow{G}}(x) \neq \phi_{\overrightarrow{G}}(t)$. O *número cromático orientado*, denotado por $\chi_o(\overrightarrow{G})$, é o menor k tal que $\overrightarrow{G}$ admite uma k-coloração orientada. Nesse artigo o problema a ser considerado é

Problema 1.1. OCN_k
Entrada: *Um grafo orientado* $\overrightarrow{G}$ *e um inteiro positivo* k*.*
Pergunta: $\chi_o(\overrightarrow{G}) \leq k$*?*

Sabemos que OCN_k é polinomial [5] para $k \leq 3$. Em [**CFGK:2016**] foi provado que OCN_k é NP-completo para $k \geq 4$, mesmo quando o grafo subjacente G é bipartido, planar e cúbico. O número cromático orientado de subgrafos de grades foi estudado por Fertin, Raspaud e Roychowdhury [3], onde vários limites e alguns valores exatos foram estabelecidos. Porém, nada é conhecido sobre

[1]{erikamorais,hebert,mateusferreira}@inf.ufg.br, luerbio@ime.uerj.br, sula@cos.ufrj.br

a complexidade de tempo de OCN_k na classe dos subgrafos de grades. Nesse artigo, provamos que OCN_k é NP-completo mesmo para subgrafos de grade com $k \geq 4$. Para isso, vamos usar o seguinte problema NP-completo.

Problema 1.2. Planar 3-SAT com no máximo 3 ocorrências por variável (P3-SAT$_{\overline{3}}$)
Entrada: *Um conjunto, $I = (U, C)$, onde U é um conjunto de variáveis booleanas e C uma coleção de cláusulas sobre U, $|U| = n$ e $|C| = m$, tal que: (i) cada cláusula $c \in C$ satisfaz $|c| = 3$ ou $|c| = 2$; (ii) cada variável tem 3 ou 2 ocorrências e cada literal negativo ocorre uma única vez em C; (iii) O grafo bipartido $W = (V, A)$ é planar, onde $V = U \cup C$ e A contém o par (u, c) se e somente se u ou $\overline{u}$ pertence a cláusula c.*
Pergunta: *Existe uma atribuição de verdade para U satisfazendo cada cláusula c.*

2 Complexidade de OCN_k em grafos grade

Seja $\overrightarrow{G} = (V, A)$ um grafo orientado e ϕ uma coloração orientada de $\overrightarrow{G}$. Denotamos os vértices de $\overrightarrow{G}$ por letras minúsculas e as cores da coloração orientada ϕ por letras maiúsculas. Quando existir a possibilidade de colorir um vértice com mais de uma cor, apresentamos essas cores separadas por uma barra "|" para representar a lista de cores permitidas para o vértice.

A técnica de construção de componentes será utilizada [2]. Assim, a partir da instância $I = (U, C)$ de P3-SAT$_{\overline{3}}$, construímos para cada variável u_i de U uma componente *Truth Setting* $\overrightarrow{T_i}$ e para cada cláusula c_j de C uma componente *Satisfaction Testing* $\overrightarrow{S_j}$ e para a ligação desses componentes utilizamos uma outra componente *Connection Gadget* $\overrightarrow{P_{i,j}}$.

O *Truth Setting* $\overrightarrow{T_i}$ é construído de algumas cópias do grafo orientado que denominamos por água-viva modificada $\overrightarrow{J_i^d}$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $d \in \{1, 2, 3\}$, descrita pelo conjunto de vértices $V(\overrightarrow{J_i^d}) = \{k_i^d, n_i^d, o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d, s_i^d, t_i^d, u_i^d, v_i^d, x_i^d\}$ e pelo conjunto de arestas $A(\overrightarrow{J_i^d}) = \{n_i^d q_i^d, p_i^d k_i^d, q_i^d p_i^d, q_i^d r_i^d, r_i^d o_i^d, o_i^d p_i^d, r_i^d s_i^d, s_i^d t_i^d, t_i^d u_i^d, u_i^d v_i^d, v_i^d x_i^d\}$. Veja Figura 1 (a). A seguir demonstramos uma propriedade do grafo água-viva modificada.

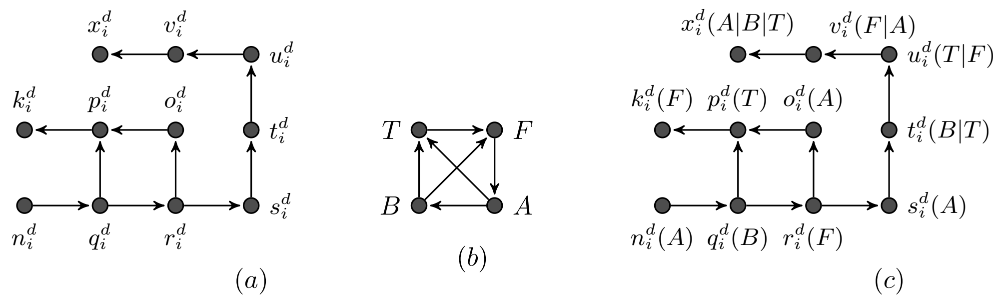


Figura 1: (a) Água-vida modificada $\overrightarrow{J_i^d}$, (b) grafo de cor $\overrightarrow{H}$ para $\overrightarrow{J_i^d}$ e (c) uma possível 4-coloração do grafo $\overrightarrow{J_i^d}$.

Lema 2.1. *Se $\overrightarrow{G} = (V, A)$ contém $\overrightarrow{J_i^d}$ como subgrafo, $\chi_o(\overrightarrow{G}) \leq 4$ e as cores A, T, B, F (não necessariamente distintas) são respectivamente atribuídas aos vértices $o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d$, então:*

1. *$\chi_o(\overrightarrow{G}) \geq 4$ e as cores atribuídas aos vértices $o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d$ devem ser distintas.*

2. *O grafo de cor de $\overrightarrow{G}$ é o torneio $\overrightarrow{H}$ com 4 vértices com a seguinte relação entre as seis cores $A(\overrightarrow{H}) = \{AB, AT, BT, BF, TF, FA\}$ (Figura 1 (b)).*

Demonstração. Siga a Figura 1. Para provar (1) observe que para todo par de vértices em $o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d$ existe um caminho de tamanho 1 ou 2 ligando os vértices no par, assim cada par de vértices tem que ter cor diferentes e dessa forma $\chi_o(\overrightarrow{G}) \geq 4$. Para provar (2) pedimos que o leitor siga a Figura 1 (b) e (c). Note que pela hipótese $\chi_o(\overrightarrow{G}) \leq 4$, assim o vértice n_i^d precisa ter a cor A. Como $q_i^d p_i^d, o_i^d p_i^d, p_i^d k_i^d \in A(\overrightarrow{G})$, o vértice k_i^d tem cor F. As cores definidas até o momento nas arestas $n_i^d q_i^d$, $o_i^d p_i^d$, $q_i^d p_i^d$, $q_i^d r_i^d$, $p_i^d k_i^d$ e $r_i^d o_i^d$, definem o grafo de cor com 4 vértices que, respectivamente, tem as seguinte arestas: AB, AT, BT, BF, TF, FA como vemos na Figura 1 (b) e (c). □

Corolário 2.1. *Se $\overrightarrow{G} = (V, A)$ contém $\overrightarrow{J_i^d}$ como um subgrafo, $\chi_o(\overrightarrow{G}) \leq 4$ e as cores A, T, B, F são respectivamente atribuídas aos vértices $o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d$, então as cores permitidas para os vértices $k_i^d, n_i^d, o_i^d, p_i^d, q_i^d, r_i^d, s_i^d, t_i^d, u_i^d, v_i^d, x_i^d$ de $\overrightarrow{J_i^d}$ são respectivamente $F, A, A, B, F, A, B|T, T|F, F|A, A|B|T$. Além disso, a única coloração permitida para um subgrafo de $\overrightarrow{G}$ com vértices o, p, q, r onde qr, ro, op, $qp \in A(\overrightarrow{G})$ é, respectivamente, A, T, B, F.*

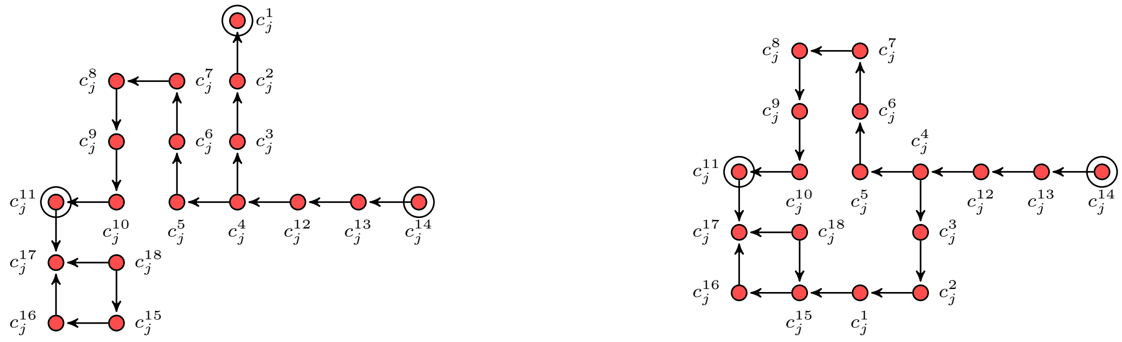
Demonstração. Para provar a primeira parte é suficiente considerar as cores até então atribuídas pelo Lema 2.1 seguindo o grafo de cor da Figura 1 (b) para obter as cores apresentadas na Figura 1 (c). Para a segunda parte, primeiro considere que como vimos no Lema 2.1(1) as cores de o, p, q, r são distintas. Observe que no ciclo o, p, q, r os vértices p e q, respectivamente, tem grau de entrada 2 e grau de saída 2. No grafo de cor os vértices T e F tem grau de entrada 2 e os vértices A e B tem grau de saída 2. Portanto, ao vértice q é atribuída a cor A ou B. Suponha que atribuímos a cor A ao vértice q. Pelo grafo de cor é atribuído a cor T ao vértice p, observe agora que existe um caminho de comprimento 3 partindo do vértice q com a cor A até o vértice p com a cor T. Esse caminho não existe no grafo de cor, uma contradição. Portanto é atribuída a cor B ao vértice q. Suponha que é atribuída a cor F ao vértice p. Assim existe um caminho de comprimento 3 do vértice q com a cor B para o vértice p com a cor F. Esse caminho não existe no grafo de cor, uma contradição, e temos que a cor T é atribuída ao vértice p. O vértice r não pode assumir a cor A e assim temos que aos vértices o, p, q, r são atribuídas as cores A, T, B, F. □

A componente *Truth Setting* $\overrightarrow{T_i}$ é definida por (Figura 3): $V(\overrightarrow{T_1}) = V(\overrightarrow{J_1^1}) \cup V(\overrightarrow{J_1^2}) \cup V(\overrightarrow{J_1^3}) \cup \{a_1^1, b_1^1, c_1^1, d_1^1, e_1^1, f_1^1 y_1^1, y_1^3, z_1^1\} \setminus \bigcup_{d=2}^3 \{n_i^d, k_i^d\}$, para $i \geq 2$, definimos $V(\overrightarrow{T_i}) = V(\overrightarrow{J_i^1}) \cup V(\overrightarrow{J_i^2}) \cup V(\overrightarrow{J_i^3}) \cup \{a_i^1, b_i^1, c_i^1, d_i^1, e_i^1, f_i^1, y_i^1, y_i^3, z_i^1\} \setminus \bigcup_{d=1}^3 \{n_i^d, k_i^d\}$, $A(\overrightarrow{T_i}) = A(\overrightarrow{J_i^1}) \cup A(\overrightarrow{J_i^2}) \cup A(\overrightarrow{J_i^3}) \setminus \{v_i^3 x_i^3\} \cup \{a_i^3 d_i^3, b_i^3 a_i^3, c_i^3 b_i^3, c_i^3 d_i^3, c_i^3 e_i^3, e_i^3 f_i^3, e_i^3 v_i^3, f_i^3 x_i^3, y_i^3 x_i^3, x_i^2 y_i^3, z_i^1 y_i^3, y_i^1 z_i^1, x_i^1 y_i^1\}$. A construção de $\overrightarrow{T_i}$ é concluída renomeando o vértice u_i^2 como $\overline{u_i^2}$.

Para cada cláusula $c_j \in C$, temos uma componente *Satisfaction Testing* $\overrightarrow{S_j}$ (Figura 2) que é definida por: $V(\overrightarrow{S_j}) = \{c_j^k : k := 1, 2, \ldots, 18\}$, e $A(\overrightarrow{S_j}) = \{c_j^2 c_j^1, c_j^3 c_j^2, c_j^4 c_j^3, c_j^4 c_j^5, c_j^5 c_j^6, c_j^6 c_j^7, c_j^7 c_j^8, c_j^8 c_j^9, c_j^9 c_j^{10}, c_j^{10} c_j^{11}, c_j^{11} c_j^{17}, c_j^{15} c_j^{16}, c_j^{18} c_j^{15}, c_j^{16} c_j^{17}, c_j^{18} c_j^{17}, c_j^{14} c_j^{13}, c_j^{13} c_j^{12}, c_j^{12} c_j^4\}$. A seguir provamos algumas propriedades estruturais de $\overrightarrow{T_i}$ e $\overrightarrow{S_j}$.

Lema 2.2. *Se $\overrightarrow{G}$ contém $\overrightarrow{T_1}$ e $\overrightarrow{T_i}$ como subgrafo, $i \geq 2$, $\chi_o(\overrightarrow{G}) \leq 4$ e as cores A, T, B, F são respectivamente atribuídas aos vértices $o_1^1, p_1^1, q_1^1, r_1^1$, então para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ as cores T, F, F são, respectivamente, atribuídas aos vértices $\overline{u_i^2}, u_i^3, u_i^1$, ou as cores F, T, T, são, respectivamente atribuídas aos vértices $\overline{u_i^2}, u_i^3$ e u_i^1.*

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0229



(a) (b)

Figura 2: (a) Componente *Satisfaction Testing* $\overrightarrow{S_j}$ para clausula c_j com 3 literais, (b) Componente *Satisfaction Testing* $\overrightarrow{S_j}$ para clausula c_j com 2 literais.

Demonstração. Primeiro note que $\overrightarrow{J_1^d}$ é um subgrafo de $\overrightarrow{T_1}$. Consequentemente, pelo Corolário 2.1 sabemos que as cores A, T, B, F são atribuídas aos vértices $o_d^i, p_d^i, q_d^i, r_d^i$.

Como $r_i^d s_i^d, s_i^d t_i^d$ e $t_i^d u_i^d \in A(\overrightarrow{G})$, temos que a cor A é atribuída para o vértice s_i^d, e a cor B ou T é atribuída para o vértice t_i^d, portanto para o vértice u_i^d é atribuída a cor T ou F. Agora, consideramos dois casos de acordo com a cor T ou a cor F ser atribuída para o vértice u_i^1. Usamos recorrentemente o Lema 2.1.

1. Suponha que a cor T é atribuída ao vértice u_i^1, acompanhe a Figura 3(b). Assim a cor F é atribuída ao vértice v_i^1 e a cor A é atribuída ao vértice x_i^1. Consequentemente, uma das cores $B|T$ é atribuída ao vértice y_i^1, uma das cores $T|F$ é atribuída ao vértice z_i^1, e uma das cores $F|A$ é atribuída ao vértice y_i^3. Pela Lema 2.1, sabemos que o vértice x_i^2 recebe uma cor em $A|B|T$. Se por absurdo a cor A é atribuída ao vértice y_i^3, então não existe cor para ser atribuída ao vértice x_i^2. Assim, a cor F é atribuída ao vértice y_i^3. Então, a cor T é atribuída ao vértice z_i^1 e a cor B ao vértice y_i^1. Como a cor F é atribuída ao vértice y_i^3, a cor A é atribuída ao vértice x_i^3. Como $f_i^3 x_i^3 \in A(\overrightarrow{G})$, a cor F é atribuída ao vértice f_i^3. Como somente as cores T ou F podem ser atribuídas ao vértice u_i^3, então ao vértice v_i^3 é atribuída a cor F. Como $u_i^3 v_i^3 \in A(\overrightarrow{G})$, então a cor T tem que ser atribuída ao vértice u_i^3. Como a cor F é atribuída ao vértice y_i^3, umas das cores $B|T$ é atribuída a x_i^2. Segue que uma das cores $A|B$ é atribuída a v_i^2. Por absurdo, se a cor B é atribuída a v_i^2, então a cor A é atribuída a $\overline{u_i^2}$, uma contradição. Portanto, a cor A é atribuída a v_i^2, e a cor F é atribuída a $\overline{u_i^2}$.

2. Suponha que a cor F é atribuída ao vértice u_i^1, por favor acompanhe a Figura 3(a). Similarmente ao primeiro caso, provamos que a cor F é atribuída ao vértice v_i^2 e a cor T é atribuída ao vértice $\overline{u_i^2}$. □

A seguir descrevemos o Lema 2.3 de **[CFGK:2016]** referente as possíveis atribuições de cores para a componente Satisfaction Testing.

Lema 2.3 (**[CFGK:2016]**). *Se $c_j = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \lambda_{i_3})[c_j = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2})] \in C$, então existe uma 4-coloração orientada ϕ para $\overrightarrow{G}$, usando o grafo de cor $\overrightarrow{H}$ descrito no Lema 2.1(2), se e somente se $(\phi(\lambda_{i_1}^{d_1}), \phi(\lambda_{i_2}^{d_2}), \phi(\lambda_{i_3}^{d_3})) \neq (F, F, F)[(\phi(\lambda_{i_1}^{d^1}), \phi(\lambda_{i_2}^{d^2})) \neq (F, F)]$, onde $\lambda_{i_1}^{d_1}, \lambda_{i_2}^{d_2}, \lambda_{i_3}^{d_3}$ são os vértices de $\overrightarrow{T_{i_1}}, \overrightarrow{T_{i_2}}, \overrightarrow{T_{i_3}}$ adjacente aos vértices de $\overrightarrow{S_j}$.*

Para cada caminho entre uma variável $\overrightarrow{T_i}$ e clausula $\overrightarrow{S_j}$, temos uma componente *Connection Gadget* $\overrightarrow{P_{i,j}}$ (Figura 4) que é definida por: $V(\overrightarrow{P_{i,j}}) = \{a_{i,j}^k : k := 1, 2, \ldots, 2q + 1\} \cup \{b_{i,j}^k, c_{i,j}^k :$

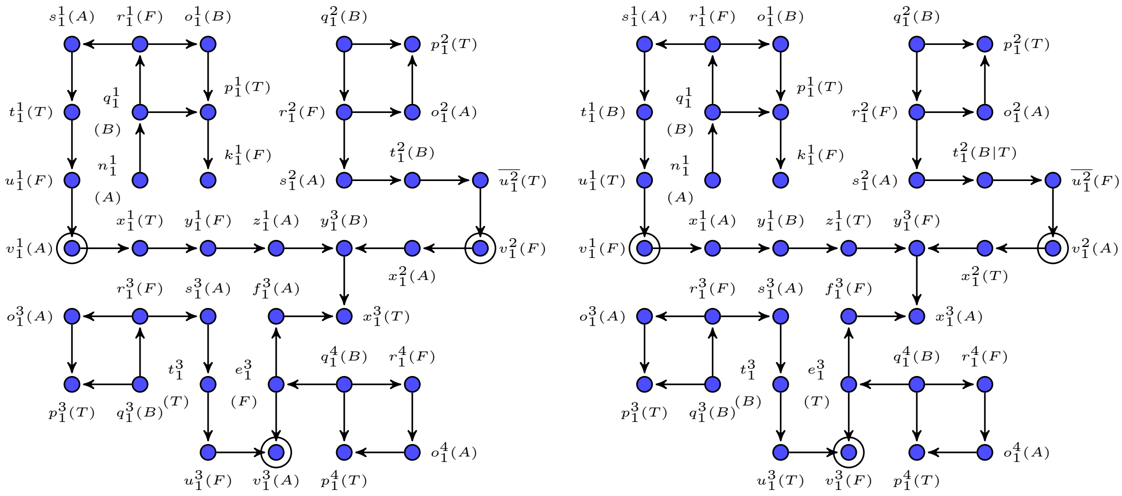


Figura 3: As duas atribuições de cores possíveis para $\overline{u_1^2}, u_1^3, u_1^1$. Em (a) a atribuição $(\overline{u_1^2}, u_1^3, u_1^1) = (T, F, F)$ e em (b) a atribuição $(\overline{u_1^2}, u_1^3, u_1^1) = (F, T, T)$.

$k := 1, 2, \ldots, 2q+2\}$ e $A(\overrightarrow{P_{i,j}}) = \{a_{i,j}^k a_{i,j}^{k+1}, a_{i,j}^{k+2} a_{i,j}^{k+1}, b_{i,j}^k a_{i,j}^k, b_{i,j}^k b_{i,j}^{k+1}, b_{i,j}^k d_{i,j}^k, b_{i,j}^{k+1} d_{i,j}^{k+1}, d_{i,j}^{k+1} d_{i,j}^k :$ $k := 1, 3, 5, \ldots, 2q-1\} \cup \{b_{i,j}^{2q+1} a_{i,j}^{2q+1}, b_{i,j}^{2q+1} b_{i,j}^{2q+2}, b_{i,j}^{2q+1} d_{i,j}^{2q+1}, b_{i,j}^{2q+2} d_{i,j}^{2q+2}, d_{i,j}^{2q+2} d_{i,j}^{2q+1}\}$. A seguir provamos uma propriedade estrutural da componente *Connection Gadget*.

Lema 2.4. *Seja $\overrightarrow{G}$ um grafo que contém $\overrightarrow{P_{i,j}}$ e $\overrightarrow{J_1^d}$ como subgrafo e $\chi_o(\overrightarrow{G}) \leq 4$. Então a cor α é atribuída ao vértice $a_{i,j}^1$, se e somente se a cor α é atribuída ao vértice $a_{i,j}^{2q+1}$ com $\alpha \in \{T, F\}$.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.1 sabemos que para cada um dos subgrafos induzidos pelos vértices $\{b_{i,j}^k, b_{i,j}^{k+1}, d_{i,j}^k, d_{i,j}^{k+1} : k := 1, 3, 5, \ldots, 2q-1\}$ e pelos vértices $\{b_{i,j}^{2q+1}, b_{i,j}^{2q+2}, d_{i,j}^{2q+1}, d_{i,j}^{2q+2}\}$ as cores B, T, A, F são, respectivamente, atribuídas aos vértices $\{b_{i,j}^k, b_{i,j}^{k+1}, d_{i,j}^k, d_{i,j}^{k+1} : k := 1, 3, 5, \ldots, 2q-1\}$ e também aos vértices $\{b_{i,j}^{2q+1}, b_{i,j}^{2q+2}, d_{i,j}^{2q+1}, d_{i,j}^{2q+2}\}$. Agora, consideramos dois casos de acordo com a cor o valor de α.

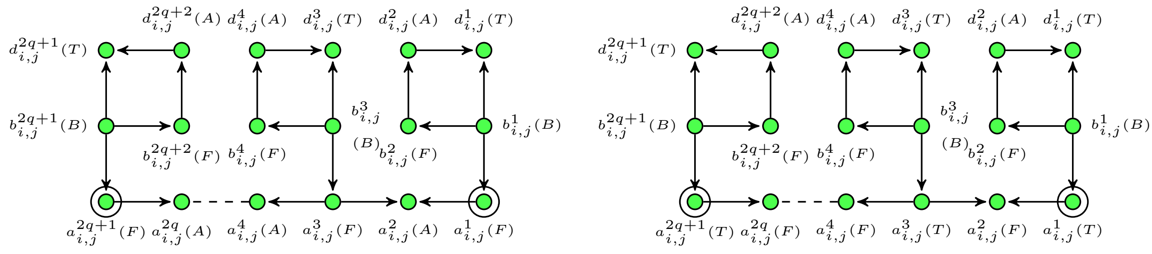
1. Suponha que $\alpha = F$, por favor acompanhe na Figura 4(a). Primeiro suponha que F é atribuído para o vértice $a_{i,j}^1$. Assim, $a_{i,j}^2$ tem a cor A e as cores F e A são atribuídas, respectivamente, a $a_{i,j}^k$ e $a_{i,j}^{k+1}$ com $k := 3, 5, 7, \ldots, 2q$ e por fim $a_{i,j}^{2q+1}$ tem a cor F. Agora suponha que F é atribuído ao vértice $a_{i,j}^{2q+1}$. Assim, $a_{i,j}^{2q}$ tem a cor A e as cores F e A são atribuídas, respectivamente, a $a_{i,j}^k$ e $a_{i,j}^{k-1}$ com $k := 2q-1, 2q-3, 2q-5, \ldots, 2$ e por fim $a_{i,j}^1$ tem a cor F.

2. Suponha que $\alpha = T$, por favor acompanhe na Figura 4(b). Similarmente ao primeiro caso, provamos que a cor T é atribuída ao vértice $a_{i,j}^1$, se e somente se a cor T é atribuída ao vértice $a_{i,j}^{2q+1}$. $\square$

Considere $D(W)$ o desenho do grafo bipartido planar $W = ((U \cup C), A)$ da instância de P3-SAT$_{\overline{3}}$. Através do algoritmo polinomial [4] obtemos uma imersão F de $D(W)$ na grade $M \times N$ (Figura 5 (a) e (b)).

Para garantir que nossa componente *Connection Gadget* $\overrightarrow{P_{i,j}}$ funcione, multiplicamos cada segmento de F por 2 (Figura 5 (c)), e obtemos o grafo F' que está representado na grade $(2M -$

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 9, n. 1, 2022.



(a) (b)

Figura 4: As duas atribuições de cores possíveis para a componente *Connection Gadget* .Em (a) a atribuição $(a^1_{i,j}) = (F)$ e em (b) a atribuição $(a^1_{i,j}) = (T)$.

$1) \times (2N-1)$. Nesse ponto adicionamos os vértices verdes necessários para que $F^{'}$ seja subgrafo de uma grade $(2M-1) \times (2N-1)$ (Figura 5 (d)), para obter o grafo $F^{''}$. Construímos agora o grafo $\overrightarrow{G}$ que será subgrafo da grade $7(2M-1) \times 7(2N-1)$, substituindo cada vértice u_i e c_j em $F^{''}$ por suas respectivas componentes, $\overrightarrow{T_i}$ e $\overrightarrow{S_j}$ de acordo com a geometria da grade $F^{''}$ realizando as reflexões e rotações necessárias. Para os demais vértices de $F^{''}$ substituímos da seguinte maneira:

- Escolha um caminho entre uma variável u_i e uma cláusula c_j. Substituímos esse caminho começando do vértice mais próximo a u_i por uma componente *Connection Gadget* $\overrightarrow{P_{i,j}}$ de tamanho $k = 7d(u_i, c_j) - 1$, onde $d(u_i, c_j)$ é a distância (número de arestas) de u_i até c_j em $F^{''}$, lembre que $d(u_i, c_j)$ é par em $F^{''}$.

- A única parte da construção que depende de quais literais ocorrem em cada clausula é se $c_j = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}) \in C$ então $\{c_j^{11}a_{i_1,j}^{2q+1}, c_j^1 c_j^{15}, a_{i_2,j}^{2q+1}c_j^{14}, v_{i_1}^{d_1}a_{i_1,j}^1, v_{i_2}^{d_2}a_{i_2,j}^1\}$, se $c_j = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \lambda_{i_3}) \in C$ então $\{c^1 1_j a_{i_1,j}^{2q+1}, c_j^1 a_{i_2,j}^{2q+1}, a_{i_3,j}^{2q+1}c_j^{14}, v_{i_1}^{d_1}a_{i_1,j}^1, v_{i_2}^{d_2}a_{i_2,j}^1, v_{i_3}^{d_3}a_{i_3,j}^1$, onde $\lambda_{i_1}^{d_1} \in \{u_{i_1}^{d_1}, \overline{u_{i_1}^{d_1}}\}$ e $\lambda_{i_1}^{d_1}\overline{v_{i_1}^{d_1}} \in A(\overrightarrow{G})$ tal que $\{u_{i_1}^{d_1}, \overline{u_{i_1}^{d_1}}, v_{i_1}^{d_1}\} \in \overrightarrow{T_{i_1}}$, $\lambda_{i_2}^{d_2} \in \{u_{i_2}^{d_2}, \overline{u_{i_2}^{d_2}}\}$ e $\overline{\lambda_{i_2}^{d_2}}v_{i_2}^{d_2} \in A(\overrightarrow{G})$ tal que $\{u_{i_2}^{d_2}, \overline{u_{i_2}^{d_2}}, v_{i_2}^{d_2}\} \in \overrightarrow{T_{i_2}}$, $\lambda_{i_3}^{d_3} \in \{u_{i_3}^{d_3}, \overline{u_{i_3}^{d_3}}\}$ e $\lambda_{i_3}^{d_3}v_{i_3}^{d_3} \in A(\overrightarrow{G})$ tal que $\{u_{i_3}^{d_3}, \overline{u_{i_3}^{d_3}}, v_{i_3}^{d_3}\} \in \overrightarrow{T_{i_3}}$. Sabendo também que $a_{i,j}^1, a_{i,j}^{2q+1} \in V(\overrightarrow{P_{i,j}})$.

Por fim demonstramos que OCN_k é NP-completo para grafos que são subgrafos de grades.

Teorema 2.1. *OCN_4 é NP-completo mesmo para subgrafos de grades.*

Demonstração. OCN_4 está em NP, pois podemos checar em tempo polinomial no tamanho da entrada, se cada classe de cor é independente e se entre cada par de classes as arestas têm a mesma direção. Seja $I = (U, C)$ uma instância de P3-SAT$_{\overline{3}}$ e $\overrightarrow{G} = (V, A)$ obtido como descrito. Provamos que $I = (U, C)$ é satisfatível se e somente se $\overrightarrow{G}$ tem uma 4-coloração orientada.

Suponha que existe uma atribuição de verdade η para U satisfazendo cada cláusula de C. Produzimos uma 4-coloração orientada para $\overrightarrow{G}$ definindo uma orientação de T_i onde as cores T, T, F são, respectivamente, atribuídas aos vértices $u_i^1, u_i^3, \overline{u_i^2}$ se e somente se $u_i = T$ em η, para cada cláusula satisfeita definimos uma orientação adequada de S_j e $P_{i,j}$ de acordo com os Lemas 2.3 e 2.4. Suponha que existe uma 4-coloração orientada para $\overrightarrow{G}$. Definimos uma atribuição de verdade η para U satisfazendo cada cláusula de C, onde u_i é definido como verdadeiro se e somente se as cores T, T, F são, respectivamente, atribuídas para os vértices $u_i^1, u_i^3, \overline{u_i^2}$. Para verificar que esta é uma atribuição de verdade é suficiente observar que a atribuição da tripla F, F, F para os vértices literais de uma mesma cláusula gera o conflito definido no Lema 2.3. $\square$

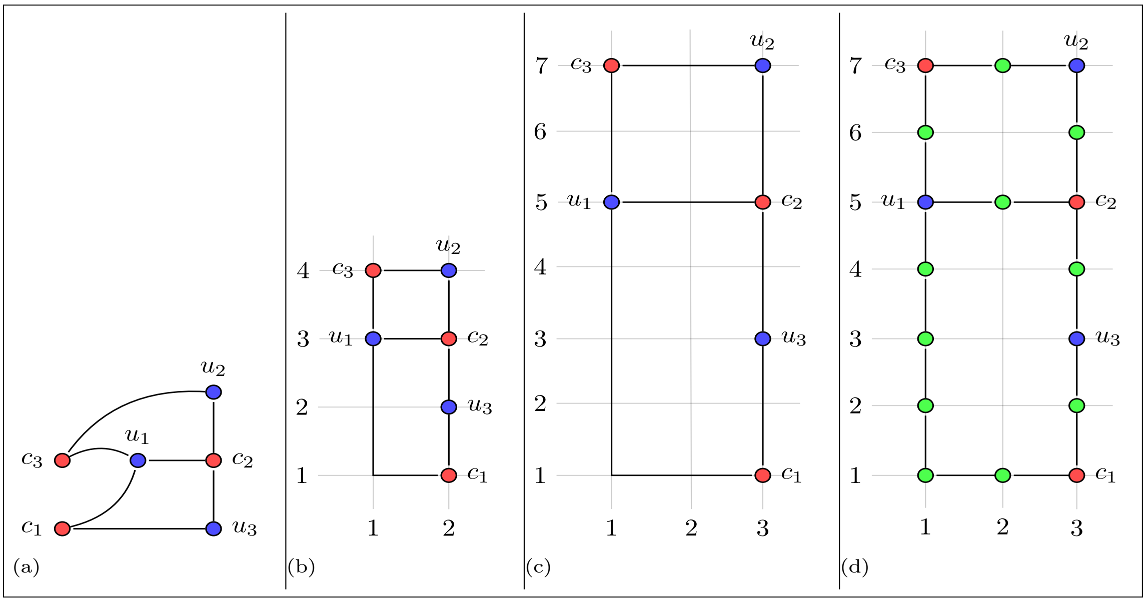


Figura 5: (a) Grafo bipartido de ocorrência planar $W = (U \cup C, \{uv \mid u \text{ ocorre em } c\})$ com grau máximo 3 relativo a instância satisfatível $I = (U, C) = \Big(\{u_1, u_2, u_3\}, \{(u_1 \vee \overline{u_3}), (u_1 \vee \overline{u_2}), (\overline{u_1} \vee u_2 \vee u_3)\}\Big)$ de P3-SAT$_{\overline{3}}$. (b) A representação de W na grade [4]. (c) Multiplicamos cada segmento por 2. (d) Adicionamos os vértices necessários para o grafo se tornar subgrafo de uma grade. A construção de $\overrightarrow{G}$ é concluída pela substituição de vértices azuis, vértices vermelhos e caminhos maximais de vértices verdes, respectivamente por componentes $\overrightarrow{T_i}$, $\overrightarrow{S_j}$ e $\overrightarrow{P_{i,j}}$.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES, ao CNPq e a FAPERJ pelo apoio financeiro.

Referências

[1] S. N. Bhatt e S. S. Cosmadakis. “The complexity of minimizing wire lengths in VLSI layouts”. Em: **Information Processing Letters** 25.4 (1987), pp. 263–267. DOI: https://doi.org/10.1016/0020-0190(87)90173-6.

[2] S. A. Cook. “The complexity of theorem-proving procedures”. Em: **Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing**. 1971, pp. 151–158. DOI: 10.1145/800157.805047.

[3] G. Fertin, A. Raspaud e A. Roychowdhury. “On the oriented chromatic number of grids”. Em: **Information Processing Letters** 85.5 (2003), pp. 261–266. DOI: https://doi.org/10.1016/S0020-0190(02)00405-2.

[4] M. R. Garey e D. S. Johnson. “The rectilinear Steiner tree problem is NP-complete”. Em: **SIAM Journal on Applied Mathematics** 32.4 (1977), pp. 826–834. DOI: https://doi.org/10.1137/0132071.

[5] W. Klostermeyer e G. MacGillivray. “Homomorphisms and oriented colorings of equivalence classes of oriented graphs”. Em: **Discret. Math.** 274.1-3 (2004), pp. 161–172. DOI: https://doi.org/10.1016/S0012-365X(03)00086-4.

