Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Um problema de coloração de arestas em grafos evitando um padrão específico em triângulos

Dionatan R. Schmidt[1]
PPGMAp/Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil
Carlos Hoppen[2]
IME/Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil
Hanno Lefmann[3]
Fakultät für Informatik, Technische Universität Chemnitz, Chemnitz, Alemanha

Resumo. Vamos considerar uma versão multicolorida de um problema originalmente proposto por Erdős e Rothschild. Para inteiros positivos n e r, procuramos por grafos de n vértices que admitem o número máximo de r-colorações, sem conter triângulos em que o padrão de coloração seja de duas arestas com a mesma cor, e a outra aresta com cor diferente. Hoppen e Lefmann [4] conjecturaram que a seguinte propriedade é válida para todo $2 \leq r \leq 26$, e provaram-na para $2 \leq r \leq 12$. Para n suficientemente grande, o grafo bipartido completo balanceado com n vértices produz o maior número de tais colorações. Nesse artigo, demonstramos essa conjectura.

Palavras-chave. Teoria Extremal de Grafos, Problema de Erdős-Rothschild, Coloração de Arestas

1 Introdução

Um dos trabalhos pioneiros em Teoria Extremal de Grafos é o de encontrar um grafo G, com n vértices, que possua o maior número de arestas e seja livre de F, ou F-livre, ou seja, não contenha uma cópia de um dado grafo F como subgrafo. Denotamos por $\mathrm{ex}(n, F)$ o número máximo de arestas em um grafo F-livre com n vértices, e os grafos F-livres com $\mathrm{ex}(n, F)$ arestas são ditos F-extremais. Um dos primeiros resultados em teoria extremal é devido a Mantel, que afirma que, para todo inteiro positivo n, o grafo K_3-extremal é um grafo bipartido completo balanceado. Turán generalizou o Teorema de Mantel, mostrando que o grafo extremal para K_{k+1} é um grafo k-partido completo balanceado com n vértices. Grafos extremais que evitam cópias K_{k+1}, com n vértices, são chamados de grafos de Turán e denotados por $T_k(n)$.

Motivados pelo problema de Turán, Erdős e Rothschild perguntaram se o grafo extremal seria alterado se acrescentássemos cores ao problema, isto é, se considerássemos r-colorações de um grafo G que evitassem cópias monocromáticas de um dado grafo F. Uma r-coloração de um grafo G é uma função $f : E(G) \to [r]$ que associa uma cor em $[r] = \{1, \ldots, r\}$ a cada aresta de G. Um subgrafo K_{k+1} cujas arestas têm todas a mesma cor é chamado de cópia monocromática de K_{k+1} e denotado por K^M_{k+1}. Ainda, considerando um determinado número de cores r e um grafo F, definimos um r-padrão P de F como uma partição do seu conjunto de arestas em no máximo r classes.

Dizemos que uma coloração de arestas de um grafo G é (F, P)-livre se não contém cópias de F coloridas de acordo com o padrão P. Seja $C_{r,(F,P)}(G)$ o conjunto de todas as r-colorações (F, P)-livres de um grafo G, e $c_{r,(F,P)}(n) = \max\{|C_{r,(F,P)}(G)| : |V(G)| = n\}$. Entre todos os

[1]dionatan.schmidt@ufrgs.br
[2]choppen@ufrgs.br
[3]Lefmann@Informatik.TU-Chemnitz.de

grafos com n vértices, os grafos que maximizam o número de r-colorações (F,P)-livres são ditos (r,F,P)-extremais.

Erdős e Rothschild conjecturaram que o maior número de 2-colorações sem conter K_{k+1}^M era obtido com o grafo de Turán $T_k(n)$. Anos depois, Yuster [9] avançou nessa questão, provando a conjectura para $k=2$ e $n \geq 6$. Alon, Balogh, Keevash e Sudakov [5] mostraram, para $r \in \{2,3\}$ e qualquer $k \geq 2$, que o grafo (r, K_{k+1}^M)-extremal é obtido com o grafo de Turán $T_k(n)$ para todo n suficientemente grande.

Um trabalho que se interliga com [5] é o de Pikhurko e Yilma [8], que determinaram os grafos (r, K_{k+1}^M)-extremais para $r=4$ e $k \in \{2,3\}$. Eles ainda mostraram que $T_4(n)$ é o grafo $(4, K_3^M)$-extremal e $T_9(n)$ é o grafo $(4, K_4^M)$-extremal. Note que ambos são grafos multipartidos completos balanceados, mas não evitam a formação de K_3 e K_4, respectivamente. Recentemente, Botler et al [6] mostraram que $T_8(n)$ é o grafo $(6, K_3^M)$-extremal e provaram um resultado de estabilidade para os grafos $(5, K_3^M)$-extremais.

O problema de determinar $c_{r,(F,P)}(n)$ foi estudado para diversos grafos e parâmetros, veja [1] e suas referências. Nesse artigo, discutiremos resultados para padrões em triângulos. Para o problema de grafos k_3-extremais, existem três padrões possíveis: o padrão monocromático P_M, o padrão de arco-íris P_R, isto é, o padrão em que todas as arestas têm cores distintas e, o padrão 2-colorido P_2, que é o padrão de coloração do triângulo com duas arestas de uma mesma cor, e a outra aresta com cor diferente.

Considerando os grafos (K_3, P_R)-livres, também temos resultados para n suficientemente grande. Balogh e Li [1] mostraram que K_n é o grafo $(3,(K_3,P_R))$-extremal e que $T_2(n)$ é o grafo $(4,(K_3,P_R))$-extremal. Já para $r \geq 5$, Lefmann, Hoppen e Odermann [3], mostraram que o grafo $T_2(n)$ é o $(r,(K_3,P_R))$-extremal.

Para o Padrão P_2, Hoppen e Lefmann [4] provaram o seguinte resultado

Teorema 1.1. *Se $2 \leq r \leq 12$, então existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ e todo grafo G com n vértices, temos*

$$|C_{r,(K_3,P_2)}(G)| \leq r^{\mathrm{ex}(n,K_3)}. \tag{1}$$

Os autores ainda conjecturaram em [4] que o Teorema 1.1 poderia ser estendido para $2 \leq r \leq 26$.

Bastos et al [7] mostraram um resultado mais geral, para famílias de padrões, dentro das quais se encontra P_2. Eles encontraram $r_0(k)$ definido para todo $k \geq 3$ tal que, para todo $2 \leq r \leq r_0(k)$, o grafo de Turán $T_k(n)$ é o único grafo G, com n vértices, que maximiza o número de r-coloração de arestas, tais que qualquer cópia de K_k em G só pode ter o padrão arco-íris. No caso em que $k=3$, o padrão P_2 esta incluso nesse resultado e $r_0(3)$ também é 12, como em [4].

Por outro lado, para $r=27$, já se tem um exemplo em que $T_2(n)$ não é o grafo $(27,(K_3,P_2))$-extremal, para n arbitrariamente grande. Considere colorações de $T_4(n)$ com conjunto de vértices particionado $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ da seguinte forma. Seja $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ uma partição do conjunto de cores tal que arestas entre V_1 e V_2, e entre V_3 e V_4 são coloridas com cores de C_1; arestas entre V_1 e V_3, e entre V_2 e V_4 coloridas com cores de C_2; arestas entre V_1 e V_4, e entre V_2 e V_3 coloridas com cores de C_3. Onde C_1, C_2 e C_3 representam uma partição disjunta do conjunto de cores tais que $|C_1| = |C_2| = |C_3| = 9$. Por construção, todos os triângulos em $T_4(n)$ têm padrão arco íris e isso produz colorações em $C_{27,(K_3,P_2)}(T_4(n))$. Supondo que n é divisível por 4, o número de colorações produzidas por essa forma de colorir $T_4(n)$ é $9^{6\cdot\frac{n^2}{16}} = 27^{\frac{n^2}{4}} = 27^{\mathrm{ex}(n,K_3)}$. Como ainda é possível colorir $T_4(n)$ de outras formas, evitando (K_3,P_2), podemos concluir que $c_{27,(K_3,P_2)}(n) > 27^{\mathrm{ex}(n,K_3))}$, fazendo com que, para $r=27$, o grafo de Turán $T_2(n)$ não seja mais (K_3,P_2)-extremal.

Nosso objetivo é provar uma conjectura de Hoppen e Lefmann [4]. O nosso resultado também implica que $r_0(3) = 26$ seria o melhor valor possível em [7]. Formalmente, o enunciado do nosso resultado é o seguinte.

Teorema 1.2. *Se $2 \leq r \leq 26$, então existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ e todo grafo G com n vértices, temos*

$$|C_{r,(K_3,P_2)}(G)| \leq r^{\mathrm{ex}(n,K_3)}. \tag{2}$$

Para provar o Teorema 1.2, é suficiente provar o seguinte resultado de estabilidade, que basicamente nos diz que um grafo que possui número de colorações (F, P)-livres que esteja próximo de $c_{r,(F,P)}(n)$ deve possuir estrutura similar à do grafo extremal para (F, P). Mais detalhes sobre como derivar um resultado exato como o Teorema 1.2 a partir de um resultado aproximado como o Lema 1.1 podem ser consultados em [7]. Para um grafo $G = (V, E)$ e um conjunto $W \subseteq V$, escrevemos $e_G(W)$ para denotar o número de arestas de G com ambas as extremidades em W.

Lema 1.1. *Seja $2 \leq r \leq 26$. Para qualquer $\delta > 0$, existe n_0 tal que o seguinte acontece para todo $n \geq n_0$. Se o grafo $G = (V, E)$, com n vértices, é tal que*

$$|C_{r,(K_3,P_2)}(G)| \geq r^{\mathrm{ex}(n,K_3)}, \tag{3}$$

então existe uma partição $V = W_1 \cup W_2$ de seu conjunto de vértices tal que $e_G(W_1)+e_G(W_2) \leq \delta n^2$.

A ideia por trás da prova do Lema 1.1 é, após a aplicação do Lema de Regularidade de Szemerédi, mostrar que existe um grafo reduzido multicolorido $\mathcal{H}$ que maximiza o número de r-colorações (K_3, P_2)-livres de G, onde este grafo $\mathcal{H}$ é, de certa forma como veremos na seção 3, bem determinado. Vale ressaltar que omitiremos alguns passos da aplicação do Lema de Regularidade de Szemerédi, os quais podem ser melhor evidenciadas em [2]. A próxima seção será dedicada a algumas notações importantes e a resultados que auxiliaram a prova do principal resultado deste trabalho, o Lema 1.1, que será tratada na seção 3.

2 Notação e Resultados Auxiliares

O próximo resultado é uma versão colorida do Lema da Regularidade. Seja um grafo $G = (V, E)$ e considere os subconjuntos disjuntos A e B de $V(G)$. Se A e B são não vazios, definimos a densidade de arestas entre A e B como $d(A, B) = e(A, B)/(|A||B|)$, onde $e(A, B)$ é o número de arestas com uma extremidade em A e outra em B. Para $\varepsilon > 0$, o par (A, B) é chamado ε-regular se, para todo $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ satisfazendo $|X| > \varepsilon|A|$ e $|Y| > \varepsilon|B|$, temos que $|d(X, Y)-d(A, B)| < \varepsilon$.

Lema 2.1. *Para todo $\varepsilon > 0$ e todo inteiro positivo r, existe $M = M(\varepsilon, r)$ tal que o seguinte acontece. Se as arestas de qualquer grafo G, com $n > M$ vértices, são r-coloridas $E(G) = E_1 \cup \cdots \cup E_r$, então existe uma partição do conjunto dos vértices $V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_m$, com $1/\varepsilon \leq m \leq M$, que é ε-regular simultaneamente com respeito aos grafos $G_i = (V, E_i)$ para todo $i \in [r]$.*

A partição $V_1 \cup \cdots \cup V_m$ de $V(G)$ como no Lema 2.1 será chamada de *partição ε-regular multicolorida*. Para $\eta > 0$, vamos definir o *grafo reduzido multicolorido* $\mathcal{H}(\eta)$ associado a essa partição, onde o conjunto de vértices é $[m]$ e $e = \{i, j\}$ é uma aresta de $\mathcal{H}(\eta)$ se $\{V_i, V_j\}$ é um par regular em G *para cada* cor $c \in [r]$ e for η-denso para alguma cor $c \in [r]$. A cada aresta e é atribuída a lista L_e contendo todas as cores para as quais o par é η-denso, de modo que $|L_e| \geq 1$ para cada aresta do grafo reduzido multicolorido $\mathcal{H}(\eta)$. Dada uma coloração de arestas $\widehat{F}$ de um grafo F, dizemos que o grafo reduzido multicolorido $\mathcal{H}$ contém $\widehat{F}$ se $\mathcal{H}$ contém uma cópia de F para qual a cor de cada aresta de $\hat{F}$ está contida na lista da aresta correspondente em $\mathcal{H}$. Geralmente, se F é um grafo com padrão de coloração P, dizemos que $\mathcal{H}$ contém (F, P) se ele contém alguma coloração $\widehat{F}$ de F com padrão P.

Usaremos o seguinte resultado, conhecido como um resultado de imersão.

Lema 2.2. *Para cada $\eta > 0$ e todo inteiro positivo k e r, existe $\varepsilon = \varepsilon(r, \eta, k) > 0$ e um inteiro positivo $n_0(r, \eta, k)$ com a seguinte propriedade. Suponha que G é um grafo r-colorido com $n > n_0$ vértices com uma partição ε-regular multicolorida $V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$ que define o grafo reduzido multicolorido $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\eta)$. Seja F um grafo com n vértices e k fixo, com um padrão P com $t \leq r$ classes. Se $\mathcal{H}$ contém (F, P), então o grafo G também contém (F, P).*

Os próximos resultados tratam de estabilidade de grafos.

Teorema 2.1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices K_{k+1}-livre. Se $|E| = \mathrm{ex}(n, K_{k+1}) - t$, então existe uma partição $V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ com $\sum_{i=1}^{k} e(V_i) \leq t$.*

Lema 2.3. *Sejam $0 < t < \frac{n^2}{16}$ e G um grafo K_3-livre com n vértices e $\mathrm{ex}(n, K_3) - t$ arestas. Se produzirmos um novo grafo G' adicionando pelo menos $5t$ novas arestas ao grafo G, então G' contém uma cópia de K_3 com exatamente uma dessas novas arestas.*

3 Prova do Teorema 1.1

Nesta seção, esboçamos a prova do Lema 1.1 em um caso específico, $r = 13$, a qual pode ser adaptada para o caso geral.

Seja $\delta > 0$ fixo e consideramos constantes auxiliares $\xi > 0$ e $\eta > 0$ tais que $\xi < \frac{\delta}{44}$, $\xi > H(14\eta) + 14\eta$ e $\eta < \frac{\delta}{26}$. Seja $\varepsilon = \varepsilon(13, \eta, 3) > 0$ e $n_0 = n_0(13, \eta, 3)$ tais que satisfazem as afirmações do Lema 2.2, e suponha sem perda de generalidade que $\varepsilon < \eta/2$. Fixemos $M = M(13, \epsilon)$ dado pelo Lema 2.1. Dado um grafo G, com $n \geq n_0$ vértices, seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$ o conjunto de todas as 13-colorações (K_3, P_2)-livres de G. Pelo Lema 2.1, cada coloração $\Phi \in \mathcal{C}$ está associada a uma partição ε-regular multicolorida $V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$, onde $1/\varepsilon \leq m \leq M$. Esta partição, por sua vez, está associada a um grafo reduzido multicolorido $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\eta)$. Seja $E_j(\mathcal{H}) = \{e \in E(\mathcal{H}) : |L_e| = j\}$ e $e_j(\mathcal{H}) = |E_j(\mathcal{H})|$, $j \in [r]$. Nossa escolha de parâmetros implica que $\mathcal{H}$ é (K_3, P_2)-livre, caso contrário, a coloração de G que leva a ele conteria uma cópia de (K_3, P_2) pelo Lema 2.2.

Para cada grafo reduzido multicolorido e cada partição de $V(G)$, obtemos uma cota superior para o número de colorações que poderiam ser associadas a esse par pelo Lema 2.1, para mais detalhes veja [4]. Somando sobre todos os possíveis pares e utilizando uma aplicação padrão do Lema de Regularidade, concluímos que o número de colorações de arestas (K_3, P_2)-livres de G é no máximo

$$M^n \cdot 2^{13M^2/2} \cdot 2^{H(14\eta)n^2} \cdot 13^{14\eta n^2} \cdot \max_{\mathcal{H}} \left(\prod_{j=1}^{13} j^{\frac{e_j(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|^2}} \right)^{n^2}. \tag{4}$$

Nosso objetivo é encontrar um limite superior para (4). Note que o termo $j = 1$ não afeta o produto em (4). Para isso, definimos $\mathcal{S} = \mathcal{S}(G)$ para ser o conjunto de todos os subgrafos dos grafos reduzidos multicoloridos (K_3, P_3)-livres de G tais que todas as arestas estejam associadas a listas de tamanho pelo menos dois e, dado $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$, vamos definir

$$c(\mathcal{H}) = \prod_{e \in E(\mathcal{H})} |L_e|^{\frac{1}{|V(\mathcal{H})|^2}}. \tag{5}$$

Desejamos encontrar $\max_{\mathcal{H} \in \mathcal{S}} c(\mathcal{H})$ para limitar (4).

Lema 3.1. *Existe um grafo reduzido multicolorido $\mathcal{H}$ tal que $e_7(\mathcal{H}) + \cdots + e_{13}(\mathcal{H}) \geq \mathrm{ex}(m, K_3) - \xi m^2$.*

Antes de abordar a prova do Lema 3.1 mostraremos que isso implica o resultado desejado. Seja $\mathcal{H}$ um grafo reduzido multicolorido com m vértices tal que $e_7(\mathcal{H})+\cdots+e_{13}(\mathcal{H}) \geq \mathrm{ex}(m, K_3)-\xi m^2$. Seja $\mathcal{H}'$ o subgrafo de $\mathcal{H}$ com conjunto de arestas $E_7(\mathcal{H}) \cup \cdots \cup E_{13}(\mathcal{H})$. A propriedade que $3 \cdot 7 > 13$ implica que $\mathcal{H}'$ é K_3-livre. De fato, como dispomos de 13 cores, qualquer triângulo em que a soma das listas associadas às arestas seja maior do que 13 contém uma mesma cor em pelo menos duas das arestas, o que leva ao padrão P_2. Pelo Teorema 2.1, existe uma partição $U_1 \cup U_2 = [m]$ com $e_{\mathcal{H}'}(U_1)+e_{\mathcal{H}'}(U_2) \leq \xi m^2$. O subgrafo bipartido $\widehat{\mathcal{H}}$ obtido de $\mathcal{H}'$ removendo todas as arestas com ambas as extremidades na mesma classe satisfaz $e(\widehat{\mathcal{H}}) \geq (\mathrm{ex}(m, K_3)-\xi m^2)-\xi m^2 = \mathrm{ex}(m, K_3) - 2\xi m^2$.

Afirmamos que $e_1(\mathcal{H})+\cdots+e_6(\mathcal{H}) \leq 10\xi m^2$. Caso contrário, por nossa escolha de ξ, o Lema 2.3 pode ser aplicado e o grafo obtido, somando as arestas em $E_1 \cup \cdots \cup E_6$ com $\widehat{\mathcal{H}}$ conteria um K_3 com exatamente uma aresta, digamos f_1, no mesmo conjunto U_i. Sejam f_2, f_3 as outras arestas da cópia de K_3, que estão em $E_7 \cup \cdots \cup E_{13}$. Por construção, temos $|L_{f_1}|+|L_{f_2}|+|L_{f_3}| \geq 1+2\cdot 7 > 13$, levando a uma coloração (K_3, P_2) em G e pelo Lema 2.2, uma contradição.

Como consequência, o número de arestas de $\mathcal{H}$ com ambas as extremidades no mesmo conjunto U_i é no máximo $11\xi m^2$. Seja $W_i = \cup_{j \in U_i} V_j$ para $i \in \{1, 2\}$. Então, pela nossa escolha de η e ξ, temos que

$$e_G(W_1) + e_G(W_2) \leq 13\eta n^2 + (n/m)^2 \cdot (e_{\mathcal{H}}(U_1) + e_{\mathcal{H}}(U_2)) < \delta n^2, \tag{6}$$

como requerido, o que prova o Lema 1.1.

Passamos agora para a prova do Lema 3.1. Dado um grafo reduzido $\mathcal{H}$, seja $E_b(\mathcal{H})$ o conjunto de todas as arestas cujas listas de cores têm tamanhos entre 7 e 13. Referimo-nos a elas como arestas *azuis* de $\mathcal{H}$. Seja $E_g(\mathcal{H})$ o conjunto de todas as arestas cujas listas de cores têm tamanhos entre 2 e 6, as arestas *verdes* de $\mathcal{H}$. O ingrediente principal na prova do Lema 3.1 é o seguinte lema auxiliar.

Lema 3.2. *Seja $\mathcal{H}$ um grafo reduzido multicolorido (K_3, P_2)-livre para o qual todas as arestas são verdes e $0 < \alpha \leq \frac{1}{100}$. Então temos que*

$$c(\mathcal{H}) \leq 13^{\frac{1}{4}-\alpha}. \tag{7}$$

Antes de provar este lema, mostraremos que ele implica a validade do Lema 3.1. Para isto, suponhamos por contradição, que qualquer coloração (K_3, P_2)-livre de G, leva a um grafo reduzido multicolorido $\mathcal{H}$, onde $|V(\mathcal{H})| = m$, para o qual

$$e_7(\mathcal{H}) + \cdots + e_{13}(\mathcal{H}) < \mathrm{ex}(m, K_3) - \xi m^2. \tag{8}$$

Seja $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ e seja $e_1 = \{u, v\}$ uma aresta azul de $\mathcal{H}_0$, se existir, logo $|L_{e_1}| \geq 7$. Consideremos os vizinhos de u e v. Se a aresta e_1 não está em algum triângulo, para cada vértice w diferente de u e v, no máximo um dos pares $\{u, w\}$ e $\{v, w\}$ é uma aresta de $\mathcal{H}$, e sua lista de cores tem tamanho máximo 13. Um vértice w que é incidente com no máximo um vértice em $\{u, v\}$ é chamado de vértice do *tipo 1*. Se u e v têm um vizinho em comum z, a soma dos tamanhos de $L_{\{u,z\}}$ e $L_{\{v,z\}}$ é no máximo $13 - |L_{e_1}| = 6$, caso contrário, obtemos uma cópia de (K_3, P_2). Assim, o produto dos tamanhos de $L_{\{u,z\}}$ e $L_{\{v,z\}}$ é no máximo $3 \cdot 3 = 9 < 13$. Tal vizinho comum z é dito ser um vértice do *tipo 2*. Sejam $n_1(e_1)$ e $n_2(e_1)$ o número de vértices do tipo 1 e 2 em relação a e_1, respectivamente. Removendo os vértices u e v e todas as arestas incidentes de $\mathcal{H}_0$, teremos o grafo reduzido multicolorido restante $\mathcal{H}_1$ com $(m-2)$ vértices. Se $\mathcal{H}_1$ contém uma aresta azul, repetimos este argumento para $\mathcal{H}_1$ e para os grafos subsequentes até chegarmos a um grafo $\mathcal{H}_{k_1}$ com $(m-2k_1)$ vértices que não contém nenhuma aresta azul, ou seja, todas as arestas em $\mathcal{H}_{k_1}$ são verdes. Por construção, temos que $k_1 + \sum_{i=1}^{k_1}(n_1(e_i) + n_2(e_i)) = \sum_{i=1}^{k_1}(m - 2i + 1) = k_1 m - k_1^2$.

Assim, o número de colorações (K_3, P_2)-livres de $\mathcal{H}$, considerando as arestas azuis é, no máximo

$$13^{k_1+n_1(e_1)+\cdots+n_1(e_{k_1})} \cdot 9^{n_2(e_1)+\cdots+n_2(e_{k_1})} = \left(\frac{9}{13}\right)^{n_2(e_1)+\cdots+n_2(e_{k_1})} 13^{k_1 m - k_1^2} \leq 13^{k_1 m - k_1^2}. \quad (9)$$

Todas as arestas do grafo $\mathcal{H}_{k_1}$ são verdes, usando o limite superior dado no Lema 3.2, obtemos

$$c(\mathcal{H})^{m^2} < 13^{k_1 m - k_1^2} \cdot 13^{(\frac{1}{4}-\alpha)(m-2k_1)^2}. \quad (10)$$

Para obter um limite superior de (10), vemos o lado direito de (10) como uma função $f(k_1)$ com domínio $0 \leq k_1 \leq m/2$. Tomando logaritmos, obtemos $\ln(f(k_1)) = k_1^2\,(-\ln 13 + (1-4\alpha)\ln 13) + k_1\,(m \ln 13 - (1-4\alpha)m \ln 13) + (1/4-\alpha)m^2 \ln 13$. Como $-\ln 13 + (1-4\alpha)\ln 13 < 0$, temos uma parábola inversa, com máximo em $k_1 = m/2$. Lembrando que, por (8), estamos assumindo que o número de arestas azuis de $\mathcal{H}$ é no máximo $\mathrm{ex}(m, K_3) - \xi m^2$. Vamos considerar dois cenários. Primeiro suponha que $k_1 m - k_1^2 \leq \mathrm{ex}(m, K_3) - \xi m^2$ e todas as arestas contadas em (10) podem ser azuis. Neste caso, temos que $k_1 \leq m/2 - \sqrt{\xi} m$, e (10) é no máximo

$$13^{\mathrm{ex}(m,K_3)-\xi m^2} \cdot 13^{\xi m^2 - 4\alpha \xi m^2} \leq 13^{\mathrm{ex}(m,K_3)} \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^{4\alpha \xi m^2} \leq 13^{\frac{m^2}{4} - \xi m^2}. \quad (11)$$

No segundo cenário, suponha que $k_1 = m/2 - \sqrt{\xi} m + q$, para $q > 0$ e $q \leq \sqrt{\xi} m$, então $k_1 m - k_1^2 = \mathrm{ex}(m, K_3) - \xi m^2 + 2\sqrt{\xi} m q - q^2$. Pela nossa restrição (9) no número de arestas azuis, a equação (10) é no máximo

$$\begin{aligned} & 13^{\mathrm{ex}(m,K_3)-\xi m^2} \cdot 9^{2\sqrt{\xi} m q - q^2} \cdot 13^{(\frac{1}{4}-\alpha)(2\sqrt{\xi} m - 2q)^2} \\ \leq\ & 13^{\mathrm{ex}(m,K_3)} \cdot \left(\frac{13}{13}\right)^{\xi m^2} \cdot \left(\frac{9}{13}\right)^{2q\sqrt{\xi} m - q^2} \cdot 13^{-\alpha(2\sqrt{\xi} m - 2q)^2} \leq 13^{\mathrm{ex}(m,K_3)-\xi m^2}, \end{aligned}$$

pois $9/13 < 1$ e $-\alpha(2\sqrt{\xi} m - 2q)^2 \leq 0$. Combinando os dois casos, e usando o limite superior (4), concluímos que o número de colorações (K_3, P_2)-livres do grafo G satisfaz

$$|\mathcal{C}_{13,(K_3,P_2)}(G)| \leq M^n \cdot 2^{(H(14\eta))n^2 + 13M^2/2} \cdot 13^{14\eta n^2} \cdot \left(13^{\mathrm{ex}(m,K_3)-\xi m^2}\right)^{\left(\frac{n}{m}\right)^2} \overset{n \gg 1}{\ll} 13^{\mathrm{ex}(n,K_3)}, \quad (12)$$

já que $\xi > 14 \cdot \eta + H(14\eta)$, o que contradiz a hipótese de que $|\mathcal{C}_{13,(K_3,P_2)}(G)| \geq 13^{\mathrm{ex}(n,K_3)}$ e prova o Lema 3.1.

Passaremos agora a prova do Lema 3.2, o qual implica diretamente do próximo resultado. Dividimos os grafos reduzidos multicoloridos com arestas verdes em duas classes. A classe $\mathcal{S}_1$ contém todos os $\mathcal{H}$ que são K_4-livres; $\mathcal{S}_2$ contém todos os $\mathcal{H}$ restantes para os quais todas as arestas são verdes, e que contêm uma cópia de K_4.

Lema 3.3. *Dado $\mathcal{H} \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ e para todo $0 < \alpha \leq \frac{1}{100}$, temos que $c(\mathcal{H}) \leq 13^{\frac{1}{4}-\alpha}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{H} \in \mathcal{S}_1$ com m vértices. Pela definição de $\mathcal{S}_1$, o conjunto $E_2 \cup \cdots \cup E_6$ não contém cópias de K_4. Assim, Pelo Teorema de Turán, temos que $|E_2| + \cdots + |E_6| \leq \mathrm{ex}(m, K_4) \leq \frac{1}{3} m^2$. Logo, um limitante superior para o número de colorações deste conjunto de arestas é dado por $6^{\frac{1}{3}}$, que para todo $\alpha \leq 1/100$, satisfaz $6^{\frac{1}{3}} < 13^{\frac{1}{4}-\alpha}$.

Para provar que o resultado vale para $\mathcal{H} \in \mathcal{S}_2$, vamos usar indução no número de vértices m de $\mathcal{H}$. O caso base é $m = 4$ e pode ser verificado por uma análise de casos. Para o passo de indução, fixe $\mathcal{H} \in \mathcal{S}_2$ com $m > 4$ vértices e assuma que o resultado vale para valores menores de m.

Fixe um conjunto $A \subset V(\mathcal{H})$ com 4 vértices tal que A induz uma cópia de K_4. Qualquer vértice $v \in V(\mathcal{H}) \setminus A$ tem no máximo quatro vizinhos em A. Seja t o número de arestas entre v e A. Para

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0321

$t = 1$, o tamanho máximo para a lista de coloração desta aresta é 6. Agora para $2 \leq t \leq 4$, observe que são formados triângulos entre as arestas t e as arestas de A que são vizinhas de v, e como esses triângulos têm listas de cores disjuntas, pois todas as t arestas formam triângulos com alguma aresta em A, o tamanho da lista de colorações das arestas t é no máximo $(13-2)/t$, onde consideramos $13-2$ cores pois as arestas de A têm pelo menos duas cores em suas listas. Portanto, o produto c_v dos tamanhos das listas de coloração das arestas entre v e A é limitado superiormente, para $2 \leq t \leq 4$, por $\max\{6, (\frac{11}{t})^t\} \leq (\frac{11}{4})^4$. Claramente,

$$c(\mathcal{H})^{m^2} = c(\mathcal{H}[A])^{16} \cdot \left(\prod_{v \in V(\mathcal{H}) \setminus A} c_v \right) \cdot c(\mathcal{H}[V(\mathcal{H}) \setminus A])^{(m-4)^2}. \tag{13}$$

Sabemos que $c(\mathcal{H}[A]) \leq (13/3)^6 \leq 13^{\frac{1}{4}-\alpha}$ pela base da indução, e que $c_v \leq (\frac{11}{4})^4$ para todo v, e que $c(\mathcal{H}[V(\mathcal{H}) \setminus A]) \leq 13^{\frac{1}{4}-\alpha}$ por hipótese de indução. Segue o resultado, pois $c(\mathcal{H})^{m^2}$ é no máximo

$$13^{\frac{16}{4}-16\alpha} \cdot \left(\frac{11}{4}\right)^{4(m-4)} \cdot 13^{(\frac{1}{4}-\alpha)(m-4)^2} \leq \left(\frac{11^4}{4^4 \cdot 13^{2-8\alpha}}\right)^{m-4} \cdot 13^{(\frac{1}{4}-\alpha)m^2} < 13^{(\frac{1}{4}-\alpha)m^2}, \tag{14}$$

como $\alpha \leq 1/100$ e $(11^4)/(4^4 \cdot 13^{2-\frac{8}{100}})^{m-4} < 1$. Isso conclui o passo de indução e prova o Lema 3.3. $\square$

Referências

[1] J. Balogh e L. Li. "The Typical Structure of Gallai Colorings and Their Extremal Graphs". Em: **SIAM Journal on Discrete Mathematics** 33.4 (2019), pp. 2416–2443. DOI: 10.1137/19M1253344.

[2] H. Lefmann C. Hoppen e K. Odermann. "A rainbow Erdős-Rothschild problem". Em: **SIAM Journal of Discrete Mathematics** 31 (2017), pp. 2647–2674. DOI: 10.1016/j.endm.2015.06.066.

[3] H. Lefmann C. Hoppen e K. Odermann. "On graphs with a large number of edge-colorings avoiding a rainbow triangle". Em: **European J. of Combinatorics** 66 (2017), pp. 168–190. DOI: 10.1016/j.ejc.2017.06.022.

[4] C. Hoppen e H. Lefmann. "Remarks on an Edge-coloring Problem". Em: **Electronic Notes in Theoretical Computer Science** 346 (2019), pp. 511–521. ISSN: 1571-0661.

[5] P. Keevash J. Balogh e B. Sudakov. "The Number of Edge Colorings With No Monochromatic Cliques". Em: **Journal of the London Mathematical Society** 70 (2003). DOI: 10.1112/S0024610704005563.

[6] F. Botler J. Corsten A. Dankovics N. Frankl H. Han A. Jimèmnez e J. Skokan. "Maximum number of triangle-free edge colourings with five and six colours". Em: **Acta Math. Univ. Comenianae** LXXXVIII.3 (2019), pp. 495–499. ISSN: 08629544.

[7] J. O. Bastos H. Lefmann C. Hoppen A. Oertel e D. R. Schmidt. "Maximum number of r-edge-colorings such that all copies of K_k are rainbow". Em: **Procedia Computer Science** 195.4 (2021), pp. 419–426.

[8] O. Pikhurko e Z. B. Yilma. "The maximum number of K_3-free and K_4-free edge 4-colorings". Em: **J. Lond. Math. Soc.** 85 (2012), pp. 593–615. DOI: 10.1112/jlms/jdr031.

[9] R. Yuster. "The number of edge colorings with no monochromatic triangle". Em: **J. Graph Theory** 21 (1996), pp. 441–452. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0118(199604)21:4<441::AID-JGT10>3.0.CO;2-I.

