Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Equação de viga com o operador $p(x)$-biharmônico

Rui M. P. Almeida[1], José C. M. Duque[2], Willian S. Panni[3]
Centro de Matemática e Aplicações, Universidade da Beira Interior, Covilhã, Portugal
Jorge Ferreira[4]
Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, Brasil

Resumo. Neste artigo, estudamos uma equação de viga não linear com o operador $p(x)$-biharmônico em um domínio unidimensional. Transformamos o problema em um sistema de duas equações diferenciais e demonstramos a existência, unicidade e regularidade da solução fraca e da solução discreta. Também investigamos a ordem de convergência e provamos algumas estimativas de erro. Em seguida, utilizamos as bases de Lagrange para obter um sistema algébrico de equações e, finalmente, implementamos os códigos computacionais no software Matlab e apresentamos dois exemplos para ilustrar a teoria.

Palavras-chave. Operador $p(x)$-biharmônico, solução fraca, método de elementos finitos mistos, ordem de convergência, simulações numéricas.

1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$. Consideramos o problema de encontrar uma função u tal que

$$\begin{cases} \Delta^2_{p(x)} u = f(x), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, \Delta u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Delta^2_{p(x)}$ é o operador $p(x)$-biharmônico, definido por $\Delta^2_{p(x)} u = \Delta(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u)$, a função $p : \overline{\Omega} \to (1, \infty)$ satisfaz, para todo $x \in \overline{\Omega}$,

$$1 < p^- = \inf_{x\in\overline{\Omega}} p(x) \le p(x) \le p^+ = \sup_{x\in\overline{\Omega}} p(x) < \infty, \tag{2}$$

e nós assumimos que $f \in L^2(\Omega)$.

Em [3], Heidarkhani, Afrouzi, Moradi, Caristi e Ge estudaram o Problema (1) em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, com $N \ge 2$, $f(x,u) \in C^0(\Omega \times \mathbb{R})$ e $\max\{2, \frac{N}{2}\} < p^-$. Os autores utilizaram métodos variacionais e comprovaram a existência de pelo menos uma solução fraca para o problema. Zhou [8] considerou $f(x,u) = \lambda g(x,u) + \mu h(x,u) - a(x)|u|^{p(x)-2}u$ no Problema (1) com a condições de fronteira do tipo Navier. Impondo condições adequadas às funções $a(x)$, $g(x,u)$ e $h(x,u)$ e utilizando métodos variacionais, ele estabeleceu condições para a existência e não existência de soluções. Ourraoui [6] estudou o Problema (1) com condições de fronteira do tipo Robin e provou a existência de soluções com e sem estrutura variacional. El Amrouss, Fouzia e Moussaoui, em [2], consideraram $f(x,u) = \beta g(x,u) - \alpha|u|^{p(x)-2}u$ e condições de fronteira do tipo Neumann para o Problema (1). Usando o teorema dos três pontos críticos, eles estabeleceram a existência de pelo menos três

[1]ralmeida@ubi.pt
[2]jduque@ubi.pt
[3]willian.panni@ubi.pt
[4]ferreirajorge2012@gmail.com

soluções para este problema. Os autores destacam que, para o Problema (1), não há na literatura artigos que investigam simultaneamente a parte analítica e discreta, a ordem de convergência e os resultados numéricos do referido problema.

2 Existência e unicidade de uma solução fraca

Através de Almeida, Duque, Ferreira e Panni [1] e Katzourakis e Pryer [4], nós definimos a variável auxiliar

$$v = |\Delta u|^{p(x)-2}\,\Delta u \iff |v|^{q(x)-2}\,v = \Delta u, \tag{3}$$

onde $q : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é o expoente conjugado de $p(x)$ satisfazendo, para todo $x \in \overline{\Omega}$, $q(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$ e

$$1 < q^- = \frac{p^+}{p^+ - 1} \leq q(x) \leq q^+ = \frac{p^-}{p^- - 1} < \infty. \tag{4}$$

Usando (3), reescrevemos o Problema (1) como o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \Delta v = f, & \text{em } \Omega, \\ \Delta u = |v|^{q(x)-2}\,v, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, \; v = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Definição 2.1. *O par $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca para o Problema (5) se, para todo $(\psi, \eta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, o seguinte sistema for satisfeito*

$$\begin{cases} a\,(v, \psi) = -\,(f, \psi)\,, & \forall\; \psi \in H_0^1(\Omega), \\ a\,(u, \eta) = -\left(|v|^{q(x)-2}\,v, \eta\right), & \forall\; \eta \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{6}$$

onde $(\cdot\,,\,\cdot)$ denota o produto interno em $L^2(\Omega)$ e a forma bilinear $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ é definida por

$$a\,(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \; \forall\; u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{7}$$

Teorema 2.1. *Sejam Ω um domínio limitado e aberto com $\partial\Omega$ de classe C^2, $f \in L^2(\Omega)$, $p(x)$ e $q(x)$ definidos como (2) e (4). Então, existe um único par $(u, v) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ que é a solução fraca para o Problema (5), no sentido da Definição 2.1.*

Demonstração (esboço): Como a forma bilinear a, definida em (7), é contínua e coerciva, então pelo teorema de Lax-Milgram existe um único $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que a primeira equação do Sistema (6) é satisfeita. Uma vez que $f \in L^2(\Omega)$ e $\partial\Omega$ possui classe C^2, tem-se $v \in H^2(\Omega)$. Através da desigualdade de Hölder e do teorema de imersões de Sobolev [5, p. 44], se $\Omega \subset \mathbb{R}$ e $1 < p(x) < \infty$, então $|v|^{q(x)-2}v \in L^2(\Omega)$ e finalmente repetimos os passos para a segunda equação. ∎

3 Problema discreto

Denotamos por $\mathcal{T}_h$ uma partição não degenerada do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}$ em intervalos com parâmetro h, ou seja, o conjunto Ω é subdividido em um número finito de subconjuntos T_k, $k = 1, \ldots, n$, chamados de elementos finitos, tais que as seguintes condições são satisfeitas:

i) $\Omega = \cup_{k=1}^n T_k$;

ii) $int(T_k) \neq \emptyset, \forall\; T_k \in \mathcal{T}_h$;

iii) $int(T_i) \cap int(T_j) = \emptyset, \forall\, T_i, T_j \in \mathcal{T}_h$ com $i \neq j$;

iv) Cada lado de T_k ou pertence à fronteira de Ω ou é lado de outro $T_i \in \mathcal{T}_h$;

v) Cada T_k tem fronteira Lipschitz contínua.

Denotamos por V_h o espaço de funções contínuas em $\overline{\Omega}$, que são polinômios de grau $r-1$, com $r \geq 2$, em cada elemento de $\mathcal{T}_h$ e que se anulam em $\partial\Omega$, ou seja,

$$V_h = \left\{ u \in C_0^0(\overline{\Omega}); u_{|_{T_k}} \text{ é um polinômio de grau } r-1 \text{ para todo } T_k \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

3.1 Existência, unicidade e regularidade de solução discreta

Definição 3.1. *O par* $(u_h, v_h) \in V_h \times V_h$ *é uma solução discreta para o Problema* (5) *se, para todo* $(\psi_h, \eta_h) \in V_h \times V_h$*, o seguinte sistema for satisfeito*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\nabla v_h, \nabla \psi_h) = -\left(f, \psi_h\right), & \forall\ \psi_h \in V_h, \\ (\nabla u_h, \nabla \eta_h) = -\left(|v_h|^{q(x)-2}\, v_h, \eta_h \right), & \forall\ \eta_h \in V_h. \end{array} \right. \tag{8}$$

Teorema 3.1. *Se* $f \in L^2(\Omega)$*, então existe uma única solução discreta* $(u_h, v_h) \in V_h \times V_h$ *para o Problema* (5)*, no sentido da Definição 3.1.*

Demonstração (esboço): Usando as desigualdades de Young, Poincaré e Hölder, e o teorema de Brouwer, demonstra-se que existe uma solução discreta $(u_h, v_h) \in V_h \times V_h$ para o Problema (5). A unicidade da referida solução é obtida por contradição supondo que existam duas soluções diferentes. ∎

Teorema 3.2. *Seja* $(u_h, v_h) \in V_h \times V_h$ *a solução discreta do Problema* (5) *no sentido da Definição 3.1. Então, para toda* $f \in L^2(\Omega)$*,*

$$\|v_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\, \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{9}$$

$$\|u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \max\left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)}^{q^+-1}, \|f\|_{L^2(\Omega)}^{q^--1} \right\}, \tag{10}$$

onde C *é uma constante.*

Demonstração (esboço): Considerando $\psi_h = v_h$ e $\eta_h = u_h$, através das desigualdades de Young e Poincaré, e de imersões de Sobolev, obtemos (9) e (10). ∎

3.2 Ordem de convergência

Para investigar a ordem de convergência do Problema (8), temos que analisar dois casos para todo $x \in \overline{\Omega}$. Primeiro consideramos o caso $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ \leq 2$, que implica $2 \leq q^- \leq q(x) \leq q^+ < \infty$, e então o caso $2 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$, que corresponde a $1 < q^- \leq q(x) \leq q^+ < 2$.

Teorema 3.3. *Sejam* Ω *um domínio limitado e aberto com* $\partial\Omega$ *de classe* C^2, $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ \leq 2$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$, (u, v) *a solução de* (6) *e* (u_h, v_h) *a solução de* (8)*. Se* $u, v \in H^s(\Omega)$*, então*

$$\|\nabla (v - v_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{s-1}\, \|v\|_{H^s(\Omega)}, \tag{11}$$

$$\|v - v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^s\, \|v\|_{H^s(\Omega)}, \tag{12}$$

$$\|\nabla (u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{s-1}\, \|u\|_{H^s(\Omega)} + Ch^s\, \|v\|_{H^s(\Omega)}, \tag{13}$$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^s\, \|u\|_{H^s(\Omega)} + C\left(h^s + h^{s+1}\right) \|v\|_{H^s(\Omega)}, \tag{14}$$

onde $1 \leq s \leq r$ *e* C *é uma constante.*

Demonstração (esboço): Para a primeira equação do Problema (8), a demonstração é idêntica à de Thomée [7, Teorema 1.1, p. 5], assim obtemos (11) e (12).

Usamos o operador de interpolação no espaço de elementos finitos V_h e através das desigualdades de Minkowski, Hölder, Young e Poincaré e das imersões de Sobolev, concluímos (13) e (14). ∎

Teorema 3.4. *Sejam Ω um domínio limitado e aberto com $\partial\Omega$ de classe C^2, $2 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < \infty$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, (u, v) a solução de (6) e (u_h, v_h) a solução de (8). Se $u, v \in H^s(\Omega)$, então*

$$\|\nabla (v - v_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{s-1} \|v\|_{H^s(\Omega)}, \tag{15}$$

$$\|v - v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^s \|v\|_{H^s(\Omega)}, \tag{16}$$

$$\|\nabla (u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{s-1} \|u\|_{H^s(\Omega)} + C \max\left\{h^{\frac{s}{p^- -1}} \|v\|_{H^s(\Omega)}^{\frac{1}{p^- -1}}, h^{\frac{s}{p^+ -1}} \|v\|_{H^s(\Omega)}^{\frac{1}{p^+ -1}}\right\}, \tag{17}$$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^s \|u\|_{H^s(\Omega)} + C(1+h) \max\left\{h^{\frac{s}{p^- -1}} \|v\|_{H^s(\Omega)}^{\frac{1}{p^- -1}}, h^{\frac{s}{p^+ -1}} \|v\|_{H^s(\Omega)}^{\frac{1}{p^+ -1}}\right\}, \tag{18}$$

onde $1 \leq s \leq r$ e C é uma constante.

Demonstração (esboço): Análoga à demonstração do Teorema 3.3. ∎

4 Resultados numéricos

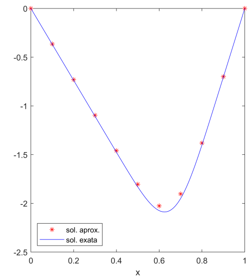
Nesta seção, apresentamos os resultados de uma implementação da teoria no software Matlab, onde validamos o código e analisamos a ordem de convergência.

4.1 Exemplo 1

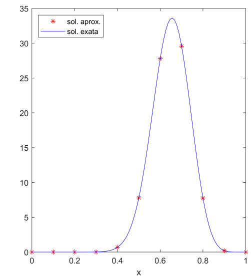
Neste exemplo, pretendemos ilustrar os resultados do Teorema 3.3. Consideremos o problema (5) onde $\Omega = [0, 1]$, $p(x) = \frac{20x+14}{10x^2+10}$ e as soluções exatas são

$$\begin{aligned} u(x) = &\frac{62500000x}{186279093} \left(30045015x^{31} - 320480160x^{30} + 1541620080x^{29} - 4404628800x^{28}\right. \\ &+ 8279070800x^{27} - 10699106880x^{26} + 9629196192x^{25} - 5960930976x^{24} \\ &\left.+ 2429727300x^{23} - 589024800x^{22} + 64512240x^{21} - 11\right) \end{aligned}$$

e $v(x) = (10x^2 - 10x^3)^{\frac{-10x^2+20x+4}{x^2+1}}$. Neste caso, a função $f(x)$ é determinada por $f(x) = v_{xx}(x)$. Nós destacamos que, $p(x)$, $f(x)$, $u(x)$ e $v(x)$ estão de acordo com o Teorema 3.3, ou seja, $1 < p^- = 1.4 \leq p(x) \leq p^+ \approx 1.9 \leq 2$, $f \in L^2(\Omega)$ e $u, v \in H^s(\Omega)$ com $s = 1, 2, 3, 4$. Para o método dos elementos finitos, consideramos que a malha do domínio é uniforme e que o espaço dos elementos finitos é formado por funções de base lineares ($r = 2$).



(a) $u(x)$ e $u_h(x)$.



(b) $v(x)$ e $v_h(x)$.

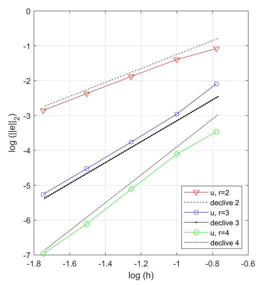
Figura 1: Soluções exatas $u(x)$ e $v(x)$ e soluções aproximadas $u_h(x)$ e $v_h(x)$.

As Figuras 1(a) e 1(b) mostram as soluções aproximadas $u_h(x)$ e $v_h(x)$ comparadas com as soluções exatas $u(x)$ e $v(x)$, respectivamente. Neste caso, usamos $n = 10$ elementos finitos e observamos que mesmo com poucos elementos finitos, boas aproximações são obtidas.

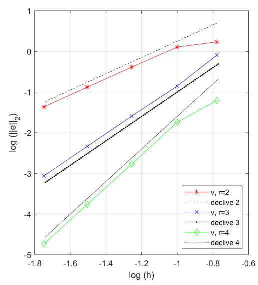
Para estudar numericamente a ordem de convergência, simulamos para diferentes valores de h e calculamos a norma em $L^2(\Omega)$ do erro

$$\|e\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{T_k} |u - u_h|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Plotando $\log(h)$ e $\log(\|e\|_2)$, o declive da reta obtida indica a ordem de convergência numérica. Na Figura 2, mostramos os gráficos de ordem de convergência, considerando $n = 6, 10, 18, 32, 56$ e $r = 2, 3, 4$.



(a) $\|u\|_2$.



(b) $\|v\|_2$.

Figura 2: Ordem de convergência com $r = 2, 3, 4$.

Destacamos que nas Figuras 2(a) e 2(b), os gráficos da ordem de convergência estão de acordo com os resultados do Teorema 3.3, ou seja, as simulações computacionais são consistentes com o estudo analítico. Além disso, as estimativas (12) e (14) não dependem de p e, para $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|v - v_h\|_{L^2(\Omega)}$, a ordem de convergência é $O(h^r)$ para polinômios de grau $r - 1$, com $r \geq 2$. Além disso, notamos que a ordem de convergência de v_h e u_h é ótima.

4.2 Exemplo 2

Neste exemplo, nós assumimos que $\Omega = [0, 1]$, a malha do domínio é uniforme, o espaço de elementos finitos é formado por funções de bases lineares e $p(x) = \frac{x+5}{x+1}$, assim $p^- = 3$ e $p^+ = 5$.

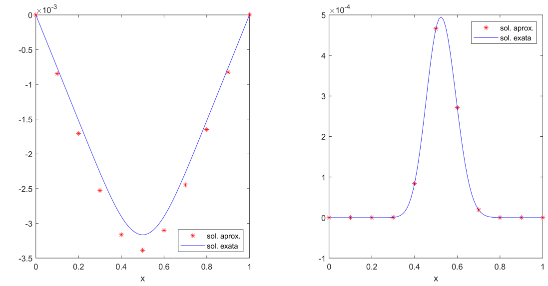
DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0253

As soluções exatas são

$$u(x) = \frac{19683x}{2586584}\big(16796x^{21} - 184756x^{20} + 918918x^{19} - 2722720x^{18} + 5325320x^{17} - 7189182x^{16} + 6789783x^{15} - 4434144x^{14} + 1918620x^{13} - 497420x^{12} + 58786x^{11} - 1\big)$$

e $v(x) = (3x - 3x^2)^{\frac{40}{x+1}}$. Novamente, $f(x) = v_{xx}(x)$ e as funções $p(x), f(x), u(x)$ e $v(x)$ estão de acordo com o Teorema 3.4.

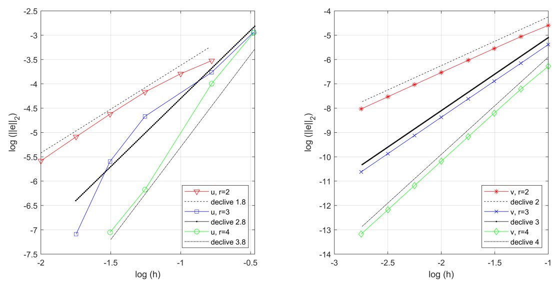
As Figuras 3(a) e 3(b) mostram as soluções aproximadas $u_h(x)$ e $v_h(x)$ comparadas com as soluções exatas $u(x)$ e $v(x)$, respectivamente. Usando $n = 10$ elementos finitos, a aproximação obtida para $u(x)$ é menos precisa do que no exemplo anterior.



(a) $u(x)$ e $u_h(x)$. (b) $v(x)$ e $v_h(x)$.

Figura 3: Soluções exatas $u(x)$ e $v(x)$ e soluções aproximadas $u_h(x)$ e $v_h(x)$.

Na Figura 4, mostramos os gráficos da ordem de convergência considerando $n = 3, 6, 10, 18, 32, 56, 100, 178, 316, 562$ e $r = 2, 3, 4$.



(a) $\|u\|_2$. (b) $\|v\|_2$.

Figura 4: Ordem de convergência com $r = 2, 3, 4$.

Lembremos que, a estimativa (16) no Teorema 3.4 não depende de p e na Figura 4(b) temos, para $\|v - v_h\|_{L^2(\Omega)}$, que a ordem de convergência é $O(h^r)$ para polinômios de grau $r-1$, com $r \geq 2$, como esperado.

Na Figura 4(a), para $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$, a ordem de convergência existe mas está abaixo da ótima, de fato, de acordo com a estimativa (18) a ordem de convergência depende de p^- e p^+ e esta diminui quando $p \to +\infty$.

5 Conclusões

Neste artigo, estudamos uma equação de viga não linear com o operador $p(x)$-biharmônico em um domínio unidimensional. Através de uma mudança de variável, o Problema (1) é transformado em um sistema de duas equações diferenciais e provamos a existência, unicidade e regularidade da solução fraca e da mesma forma para o problema discreto associado ao Problema (1). Mostramos que a ordem de convergência e as estimativas de erro são ótimas em alguns casos. Deduzimos um método prático para equações de quarta ordem com expoentes variáveis usando o método dos elementos finitos clássico com bases de Lagrange e demonstramos que é confiável e eficiente, além disso, utilizamos o software Matlab para implementar o problema e realizar simulações computacionais para ilustrarem a teoria.

Como trabalhos futuros, pretendemos investigar o Problema (1) considerando a função $f(x,u)$, além de suposições apropriadas sobre a função de expoente variável $p(x)$.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente apoiado pelos projetos de investigação: FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade, FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia [Projeto UIDB/00212/2020].

O terceiro autor foi apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia, através do Centro de Matemática e Aplicações - Universidade da Beira Interior, sob o número de bolsa UI/BD/150794/2020, e também foi apoiado por MCTES, FSE e UE.

Referências

[1] Rui M. P. Almeida et al. **Mixed finite element method for a beam equation with the *p*-biharmonic operator**. arXiv. Acessado em 30/03/2022, https://arxiv.org/abs/2202.10350.

[2] A. R. El Amrouss, M. Fouzia e M. Moussaoui. "Existence and Multiplicity of Solutions for a p(x)-biharmonic Problem with Neumann Boundary Conditions". Em: **Bol. Soc. Paran. Mat.** 40 (2021), pp. 1–15. DOI: 10.5269/bspm.42168.

[3] S. Heidarkhani et al. "Existence of one weak solution for $p(x)$-biharmonic equations with Navier boundary conditions". Em: **Z. Angew. Math. Phys.** 67.3 (2016), p. 13. ISSN: 0044-2275. DOI: 10.1007/s00033-016-0668-5.

[4] N. Katzourakis e T. Pryer. "On the numerical approximation of p-biharmonic and ∞-biharmonic functions". Em: **Numer. Methods Partial Differential Equations** 35.1 (2019), pp. 155–180. ISSN: 0749-159X. DOI: 10.1002/num.22295.

[5] A. Novotný e I. Straškraba. **Introduction to the mathematical theory of compressible flow**. Vol. 27. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Oxford University Press, Oxford, 2004, pp. xx+506. ISBN: 0-19-853084-6.

[6] A. Ourraoui. "On a class of a boundary value problems involving the $p(x)$-biharmonic operator". Em: **Proyecciones** 38.5 (2019), pp. 955–967. ISSN: 0716-0917.

[7] V. Thomée. **Galerkin finite element methods for parabolic problems**. Second. Vol. 25. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006, pp. xii+370. ISBN: 978-3-540-33121-6; 3-540-33121-2.

[8] Z. Zhou. "On a $p(x)$-biharmonic problem with Navier boundary condition". Em: **Bound. Value Probl.** 149 (2018), p. 14. ISSN: 1687-2762. DOI: 10.1186/s13661-018-1071-2.

