Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Ortogonalidade de polinômios envolvidos em uma combinação linear com os polinômios de Chebyshev

Mirela Vanina de Mello,
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, DCET, UESC,
45662-900 , Ilhéus, BA
E-mail: mirelavanina@gmail.com

Resumo: *Sejam* $\{u_n\}_{n\geq 0}$ *e* $\{S_n\}_{n\geq 0}$ *sequências de polinômios tais que*

$$u_n(x) = S_n(x) + a_{n-1}S_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

onde $\{a_n\}_{n\geq 0} \in \mathbb{R}$ *e* u_n *são os polinômios ortogonais de Chebyshev de segunda espécie. Nosso interesse é descobrir quando que* $\{S_n\}_{n\geq 0}$ *é uma sequência de polinômios ortogonais.*

Marcellán e Petronilho [4] resolveram este problema impondo condições sobre os coeficientes a_n*. Eles também obtiveram uma relação entre os funcionais lineares relacionados aos polinômios ortogonais citados. Usando resultados para recuperação da medida de ortogonalidade via determinantes de Turán [5], determinamos tanto a sequência de coeficientes* a_n *para que* $\{S_n\}_{n\geq 0}$ *seja ortogonal e não apenas o funcional linear, mas sim a função peso com relação a qual os correspondentes polinômios* S_n *são ortogonais. Em outras palavras, a resposta à questão formulada acima foi obtida de uma maneira totalmente diferente e independente da abordagem de Marcellán e Petronilho, sendo a nossa abordagem totalmente analítica enquanto a outra totalmente algébrica.*

Palavras-chave: *Polinômios Ortogonais, Combinações Lineares de Polinômios, Polinômios de Chebyshev.*

1 Introdução

Sejam

$$u_n(x) = S_n(x) + a_{n-1}S_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{1}$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$ e u_n são os polinômios ortonormais de Chebyshev de segunda espécie. Sabemos que estes polinômios são ortonormais com relação à função peso

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$$

no intervalo $(-1, 1)$ e que satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$u_n(x) = 2xu_{n-1}(x) - u_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \tag{2}$$

com $u_0(x) = 1$ e $u_1(x) = 2x$. Para mais detalhes sobre esses polinômios consulte, por exemplo, o texto clássico de Chihara, [1].

Neste trabalho, encontraremos condições suficientes sobre os coeficientes a_n, $n \geq 0$, para que $\{S_n\}_{n\geq 0}$ seja uma sequência de polinômios ortogonais com relação à uma certa medida $d\phi$. Em seguida, apresentaremos a forma explícita de $d\phi$. Em outras palavras, demonstraremos aqui o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *Se*

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}(a_{n-2} - a_{n-1}) + 1}, & n \geq 2, \\ |a_0| < 1/2, \end{cases} \tag{3}$$

então $\{S_n\}_{n\geq 0}$ *é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida*

$$d\phi(x) = \frac{4a_0}{\pi}\left(x + \frac{1}{2a_0}\right)\sqrt{1-x^2}dx,$$

no intervalo $(-1, 1)$.

Nossa abordagem consistirá em utilizar o seguinte resultado, encontrado no trabalho de Máté, Nevai e Totik [5].

Teorema 1.2. *Dada uma sequência de polinômios ortonormais* $\{p_n\}_{n\geq 0}$ *que satisfaz a relação de recorrência de três termos*

$$\delta_{n+1}p_n(x) = (x - \beta_n)p_{n-1}(x) - \delta_n p_{n-2}(x)$$

tal que os coeficientes dessa relação satisfazem às condições de Nevai

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \tag{4}$$

e são de variação limitada, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\delta_{n+2} - \delta_{n+3}| + |\beta_{n+1} - \beta_{n+2}| < \infty,$$

então $d\phi(x) = w(x)dx$, *com* $w(x)$ *estritamente positiva e contínua em* $(-1, 1)$. *Além disso*

$$\lim_{n\to\infty} \left[[p_n(x)]^2 - p_{n+1}(x)p_{n-1}(x)\right] = \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{1-x^2}}{w(x)}$$

uniformemente em todo subconjunto compacto de $(-1, 1)$.

2 Ortogonalidade dos polinômios S_n

Através da relação (2), substituindo cada polinômio u_n pela combinação linear de S_n e S_{n-1} dada por (1), obtemos o seguinte resultado:

Lema 2.1. *Os polinômios* S_n *podem ser obtidos através da relação de recorrência de quatro termos:*

$$S_n(x) = (2x - a_{n-1})S_{n-1}(x) + (2xa_{n-2} - 1)S_{n-2}(x) - a_{n-3}S_{n-3}(x), \tag{5}$$

para $n \geq 2$, *onde* $S_{-1}(x) = a_{-1} = 0$, $S_0(x) = 1$ *e* $S_1(x) = 2x - a_0$.

Usando o lema anterior, podemos estabelecer uma outra relação para os polinômios S_n.

Lema 2.2. *Para* $n \geq 4$, *os polinômios* S_n *satisfazem*

$$\begin{aligned} S_n(x) &= [2x - a_{n-1} + a_{n-2}]\, S_{n-1}(x) - \gamma_n S_{n-2}(x) - (a_{n-3} - a_{n-2}\gamma_{n-1})S_{n-3}(x) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-3} (-1)^{n-j-1} a_{j+1}a_{j+2}\ldots a_{n-3}a_{n-2}(a_{j-1} - a_j\gamma_{j+1})S_{j-1}(x), \end{aligned} \tag{6}$$

onde $\gamma_n = [a_{n-2}(a_{n-3} - a_{n-2}) + 1]$, *para* $n \geq 2$ *com* $a_{-1} = 0$, *sendo*

$$\begin{aligned} S_3(x) &= [2x - a_2 + a_1] S_2(x) - \gamma_3 S_1(x) - (a_0 - a_1\gamma_2) S_0(x), \\ S_2(x) &= [2x - a_1 + a_0] S_1(x) - \gamma_2 S_0(x), \\ S_1(x) &= [2x - a_0] S_0(x), \end{aligned}$$

e $S_0(x) = 1$.

Note que se $a_{j-1} - a_j\gamma_{j+1} = 0$ para $j \geq 1$, isto é, se

$$a_j = \frac{a_{j-1}}{a_{j-1}(a_{j-2} - a_{j-1}) + 1}, \quad j \geq 2, \tag{7}$$

com $a_1 = \dfrac{a_0}{1 - a_0^2}$, pela relação (6), temos

$$S_n(x) = [2x - a_{n-1} + a_{n-2}] S_{n-1}(x) - \gamma_n S_{n-2}(x),$$

com $S_0(x) = 1$ e $S_1(x) = (2x - a_0)S_0(x)$. Assim, os polinômios S_n satisfazem a uma relação de recorrência de três termos, com $\gamma_n > 0$. Logo, pelo clássico Teorema de Favard (consulte, por exemplo, [1]), $\{S_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais.

A seguir enunciaremos alguns resultados sobre os coeficientes a_n que serão de extrema importância para obtermos a medida de ortogonalidade de S_n.

Primeiramente, usando a condição (7) para os coeficientes a_n e o princípio da indução finita, obtemos as seguintes representações para tais coeficientes:

Lema 2.3. *Seja* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *uma sequência de coeficientes que satisfazem à relação* (7)*. Então,*

$$a_{2m} = a_0 \frac{Q_m(a_0^2)}{R_m(a_0^2)} \quad e \quad a_{2m+1} = a_0 \frac{R_m(a_0^2)}{Q_{m+1}(a_0^2)}, \quad m \geq 0, \tag{8}$$

onde

$$Q_{m+1}(a_0^2) = -a_0^2 Q_m(a_0^2) + R_m(a_0^2), \tag{9}$$

$$R_{m+1}(a_0^2) = -a_0^2 Q_m(a_0^2) + (1 - a_0^2) R_m(a_0^2), \tag{10}$$

com $Q_0 = R_0 = 1$*. Em particular, se* $a_0 = 0$*, então* $S_n(x) = u_n(x)$, $n \geq 1$.

Lema 2.4. *Seja* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *uma sequência de coeficientes que satisfazem à relação* (7)*. Então,*

$$a_{2m} = a_0 \frac{(1+d_0)(1-2a_0^2+d_0)^m - (1-d_0)(1-2a_0^2-d_0)^m}{(1-2a_0^2+d_0)^{m+1} - (1-2a_0^2-d_0)^{m+1}}, \tag{11}$$

$$a_{2m+1} = \frac{2a_0\left[(1-2a_0^2+d_0)^{m+1} - (1-2a_0^2-d_0)^{m+1}\right]}{(1+d_0)(1-2a_0^2+d_0)^{m+1} - (1-d_0)(1-2a_0^2-d_0)^{m+1}}, \tag{12}$$

com $d_0 = \sqrt{1 - 4a_0^2}$.

Demonstração: Note que as relações (9) e (10) formam um sistema de equações de diferenças. Para encontrarmos a forma explícita para R_m e Q_m, basta encontrar a solução desse sistema e substituirmos a solução no lema anterior. ■

Para encontrarmos a medida com relação à qual S_n é ortogonal, precisamos transformar os polinômios ortogonais S_n em polinômios ortonormais, para tal abordagem nos referenciamos à [3]. Vamos denotar por

$$s_n(x) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} [a_k(a_{k-1} - a_k) + 1]\right)^{-1/2} S_n(x),$$

com $s_0(x) = 1$ e $a_{-1} = 0$, o polinômio S_n ortonormalizado. Definindo

$$\pi_n := \left(\prod_{k=0}^{n-1} [a_k(a_{k-1} - a_k) + 1]\right)^{1/2},$$

obtemos a nova combinação linear entre os polinômios ortonormais u_n e s_n

$$\pi_n s_n(x) + a_{n-1}\pi_{n-1}s_{n-1}(x) = u_n(x). \tag{13}$$

Além disso, os polinômios ortonormais s_n satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$\frac{\sqrt{a_{n-1}(a_{n-2} - a_{n-1}) + 1}}{2} s_n(x) = \left(x - \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2}\right) s_{n-1}(x) - \frac{\sqrt{a_{n-2}(a_{n-3} - a_{n-2}) + 1}}{2} s_{n-2}(x),$$

com $s_0(x) = 1$ e $s_1(x) = \dfrac{2x - a_0}{\sqrt{1 - a_0^2}}$.

Dada a forma explícita para os coeficientes a_n, obtemos as seguintes expressões limites:

Lema 2.5. *Para*

$$|a_0| < \frac{1}{2},$$

com $a_0 \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 - d_0}{2a_0} \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \pi_n = \frac{\sqrt{2}a_0}{\sqrt{1 - d_0}}. \tag{14}$$

Utilizando os resultados anteriores e algumas manipulações algébricas, não é difícil mostrar que as hipóteses do Teorema 1.2 são todas satisfeitas. Assim, de posse de todos os resultados apresentados, podemos demonstrar o teorema principal deste trabalho.

Teorema 2.1. *Seja*

$$\pi_n s_n(x) + a_{n-1}\pi_{n-1}s_{n-1}(x) = u_n(x), \quad n \geq 1, \tag{15}$$

onde $\{u_n\}$ *denota a sequência de polinômios ortonormais de Chebyshev de segunda espécie. Se*

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}(a_{n-2} - a_{n-1}) + 1}, \quad n \geq 1,$$

com $a_{-1} = 0$, *então a sequência* $\{s_n\}$ *também é uma sequência de polinômios ortogonais. Além disso, denotando por* $d\phi$ *a medida com relação à qual* s_n *é ortonormal, se*

$$|a_0| < \frac{1}{2},$$

com $a_0 \neq 0$, *então* $d\phi$ *é absolutamente contínua em* $(-1, 1)$ *e* $d\phi(x) = w(x)dx$, *com* w *estritamente positiva e contínua em* $(-1, 1)$. *Ademais, a função peso* $w(x)$ *é dada por*

$$w(x) = \frac{4a_0}{\pi}\left(x + \frac{1}{2a_0}\right)\sqrt{1 - x^2}.$$

Demonstração: Usando (15), obtemos

$$\begin{aligned} u_n^2(x) - u_{n+1}(x)u_{n-1}(x) = &\ [\pi_n s_n(x) + a_{n-1}\pi_{n-1}s_{n-1}(x)]^2 \\ &- [\pi_{n+1}s_{n+1}(x) + a_n\pi_n s_n(x)]\,[\pi_{n-1}s_{n-1}(x) + a_{n-2}\pi_{n-2}s_{n-2}(x)]\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Fazendo n tender ao infinito em (16) e usando o Lema 2.5, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[u_n^2(x)-u_{n+1}(x)u_{n-1}(x)\right] &= \frac{2a_0^2}{1-d_0}\lim_{n\to\infty}[s_n^2(x)-s_{n+1}(x)s_{n-1}(x)] \\ &+\frac{1-d_0}{2}\lim_{n\to\infty}[s_{n-1}^2(x)-s_n(x)s_{n-2}(x)]+a_0\lim_{n\to\infty}[s_n(x)s_{n-1}(x)-s_{n+1}(x)s_{n-2}(x)].\end{aligned} \tag{17}$$

Do Teorema 1.2, podemos afirmar que

$$\lim_{n\to\infty}\left[s_n^2(x)-s_{n+1}(x)s_{n-1}(x)\right]=\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{1-x^2}}{w(x)}. \tag{18}$$

Ademais, utilizando um resultado semelhante ao Teorema 1.2, encontrado em [2], e sabendo que $u_2(x)=4x^2-1$ e $u_0^{(1)}(x)=1$, o polinômio associado, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}[s_n(x)s_{n-1}(x)-s_{n+1}(x)s_{n-2}(x)] &= \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{1-T^2(x)}}{w(x)}sinal[T'(x)] \\ &= \frac{4|x|}{\pi}\frac{\sqrt{1-x^2}}{w(x)}\frac{x}{|x|},\end{aligned} \tag{19}$$

onde

$$T(x)=\frac{1}{2}\left(u_2(x)-u_0^{(1)}(x)\right)=2x^2-1.$$

Assim, utilizando as igualdades (17), (18) e (19) e a identidade para os polinômios ortonormais de Chebyshev

$$u_n^2(x)-u_{n+1}(x)u_{n-1}(x)=1,$$

obtemos

$$\begin{aligned}1=\lim_{n\to\infty}\left[u_n^2(x)-u_{n+1}(x)u_{n-1}(x)\right] &= \frac{2a_0^2}{1-d_0}\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{1-x^2}}{w(x)}+\frac{1-d_0}{2}\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{1-x^2}}{w(x)} \\ &\quad +a_0\frac{4x}{\pi}\frac{\sqrt{1-x^2}}{w(x)} \\ &= \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{1-x^2}}{w(x)}a_0\left(x+\frac{1}{2a_0}\right).\end{aligned}$$

Portanto, obtemos o resultado desejado, ou seja,

$$w(x)=\frac{4a_0}{\pi}\left(x+\frac{1}{2a_0}\right)\sqrt{1-x^2}.$$

Observe que $w(x)\geq 0$, mas não identicamente nula em $(-1,1)$ se, e somente se, $|a_0|<\frac{1}{2}$. ■

Referências

[1] T.S. Chihara, "An introduction to orthogonal polynomials", Gordon and Breach, New York, 1978.

[2] J.S. Geronimo; W. Van Assche, Approximating the weight function for orthogonal polynomials on several intervals, *J. Approx. Theory,* 65 (1991) 341-371.

[3] M.H. Ismail; M.E. Muldoon, A discrete approach to monotonicity of zeros of orthogonal polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* 323 (1991) 65-78.

[4] F. Marcellán; J. Petronilho, Orthogonal polynomials and coherent pairs: the classical case, *Indag. Mathem.* 6 (1995), 287-307.

[5] A. Máté; P. Nevai; V. Totik, Asymptotics for orthogonal polynomials defined by a recurrence relation, *Constr. Approx.* 1 (1985) 231-248.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0029