

# Análise do algoritmo IWOA acoplado a uma técnica de penalização adaptativa em problemas de otimização com restrições aplicados a projetos de engenharia

Dênis E. C. Vargas<sup>1</sup>  
DM/CEFET-MG, Belo Horizonte, MG

Afonso C. C. Lemonge<sup>2</sup>  
MAC/UFJF, Juiz de Fora, MG

Elizabeth F. Wanner<sup>3</sup>  
DECOM/CEFET-MG, Belo Horizonte, MG

**Resumo.** O *Whale Optimization Algorithm* (WOA) é uma metaheurística bioinspirada no comportamento de caça das baleias que tem se destacado em pesquisas recentes devido, principalmente, a sua rápida convergência. Entretanto, isso pode aumentar a probabilidade de que o algoritmo fique preso a ótimos locais. Recentemente foi proposto o *Improved WOA* (IWOA), que melhora a capacidade de exploração do espaço de busca evitando convergência prematura. Devido ao IWOA ter sido originalmente proposto para problemas sem restrições, esse trabalho propõe ampliá-lo para resolver problemas com restrições através do acoplamento de uma técnica de penalização adaptativa denominada APM. Experimentos numéricos foram realizados para avaliar o desempenho do algoritmo proposto, o qual foi nomeado IWOA+APM. Oito problemas de otimização com restrições aplicados a projetos de engenharia foram utilizados nesses experimentos. Os resultados foram promissores, mostrando que o IWOA+APM foi competitivo neste conjunto de problemas quando comparado à resultados encontrados na literatura.

**Palavras-chave.** Whale optimization, técnica de penalização adaptativa, otimização com restrições, projeto ótimo de engenharia.

## 1 Introdução

*Whale Optimization Algorithm* (WOA) [1] é uma metaheurística bioinspirada no comportamento de caça das baleias jubarte que buscam alimento procurando, cercando e atacando a presa. Semelhante a outras metaheurísticas evolutivas, o WOA usa uma população de baleias que melhoram suas posições procurando pela presa (valor ótimo), cercando-a e atacando-a através de uma cortina de bolhas em espiral. Uma revisão de literatura envolvendo hibridização, melhorias e variantes do WOA é descrita em [2], além de aplicações em diversas áreas, mostrando que o WOA tem ganhado destaque na literatura devido principalmente a sua rápida convergência.

Tradicionalmente, as metaheurísticas evolutivas buscam equilibrar duas habilidades: *exploration* (exploração inicial do espaço de busca) e *exploitation* (refinamento das soluções promissoras

---

<sup>1</sup>denis.vargas@cefetmg.br

<sup>2</sup>afonso.lemonge@ufjf.edu.br

<sup>3</sup>efwanner@cefetmg.br

já obtidas). O WOA é um algoritmo que possui rápida convergência e um bom desempenho em relação a habilidade *exploitation*. Entretanto, isso pode aumentar a probabilidade dele ficar preso em um ótimo local e obter uma convergência prematura se ele não tiver também um bom desempenho em relação a habilidade *exploration*. Hibridizações com técnicas mais eficientes de exploração tais como a Evolução Diferencial (ED) [4] podem melhorar o desempenho do WOA. O *Improved WOA* (IWOA) [3] combina a habilidade *exploration* da ED com a habilidade *exploitation* do WOA.

Originalmente, o IWOA foi proposto para problemas sem restrições. Para o tratamento de restrições, as funções de penalização estão entre as técnicas mais populares. Dentre os diversos esquemas de penalidades encontrados na literatura está o proposto em [5] denominado *Adaptive Penalty Method* (APM). As principais vantagens da técnica de tratamento de restrições APM são ser livre de parâmetros a serem definidos pelo usuário e adaptar os coeficientes de penalização usando informações da população de soluções candidatas na iteração corrente. A ideia principal é fazer com que o valor dos coeficientes de penalização sejam distribuídos de tal forma que as restrições mais difíceis de serem atendidas sejam penalizadas mais fortemente. Trabalhos como [6] e [7], nos quais a técnica APM foi aplicada com sucesso no tratamento de restrições de problemas de otimização, principalmente em problemas do mundo real, podem ser encontrados na literatura.

Esse trabalho propõe estender o IWOA a problemas com restrições através do acoplamento com a técnica APM. O algoritmo resultante é chamado aqui de IWOA+APM. Experimentos numéricos com 8 problemas de otimização com restrições aplicados a projetos de engenharia foram realizados para avaliar o desempenho do IWOA+APM. O restante do trabalho está organizado da seguinte forma: a Seção 2 descreve os materiais e métodos utilizados nesse trabalho, a Seção 3 mostra os resultados dos experimentos numéricos realizados juntamente com as discussões e análise dos resultados e, por fim, a Seção 4 apresenta as conclusões.

## 2 Materiais e Métodos

### 2.1 Problemas de Otimização com Restrições

Problemas de otimização com restrições podem ser definidos como:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a} \quad & g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, p \\ & h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, q \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{1}$$

em que  $f(\mathbf{x})$  representa a função objetivo a ser minimizada,  $g_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, p$  representam as restrições de desigualdades e  $h_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, \dots, q$  as restrições de igualdade que precisam ser satisfeitas. As descrições completas das funções objetivo e das restrições de cada um dos problemas utilizados nesse trabalho não serão exibidas nesse texto por limitações de número de páginas e espaço. O leitor interessado poderá encontrá-las na referência [8].

### 2.2 IWOA+APM

O WOA começa com uma população aleatória de  $NP$  baleias, que podem reconhecer a localização das presas e cercá-las. Seja  $\mathbf{x}_t$  a posição de uma baleia na iteração  $t$ ,  $\mathbf{x}_t^*$  a melhor posição obtida até o momento e  $\mathbf{x}_t^{rand}$  a posição de alguma baleia escolhida aleatoriamente na população. As equações que representam as baleias buscando alimento procurando pela presa são dadas por:

$$\mathbf{D} = |\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_t^{rand} - \mathbf{x}_t| \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t^{rand} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}, \tag{2}$$

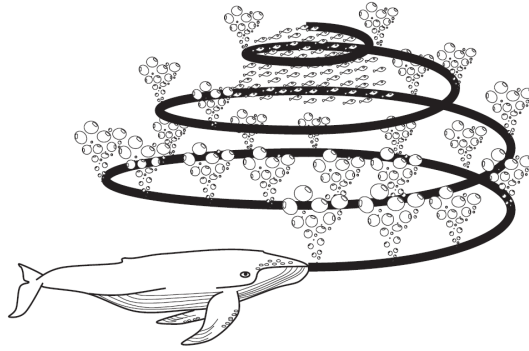


Figura 1: Ilustração do comportamento de uma baleia atacando através de uma cortina de bolhas em espiral (Extraído de [1]).

em que  $\mathbf{A} = 2\mathbf{a} \odot \mathbf{r} - \mathbf{a}$  e  $\mathbf{C} = 2\mathbf{r}$ , sendo  $\mathbf{r}$  um vetor de números aleatórios entre 0 e 1 e  $\mathbf{u} \odot \mathbf{v}$  o produto de Hadamard entre os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . Todas as entradas do vetor  $\mathbf{a}$  são iguais à  $2 - 2t/t_{max}$ , onde  $t$  é a iteração corrente e  $t_{max}$  o número máximo de iterações. As equações que representam as baleias cercando a presa são as mesmas, trocando  $\mathbf{x}_t^{rand}$  por  $\mathbf{x}_t^*$ . Já a equação que representa as baleias atacando através de uma cortina de bolhas em espiral (comportamento ilustrado na Figura 1) é dada por:

$$\mathbf{x}_{t+1} = |\mathbf{x}_t^* - \mathbf{x}_t|e^{bl} \cos(2\pi l) + \mathbf{x}_t^* \quad (3)$$

onde  $b$  é um parâmetro definido pelo usuário relacionado à forma da espiral logarítmica e  $l$  um número aleatório entre  $-1$  e  $1$ .

O IWOA combina as equações do WOA com o esquema clássico de mutação da ED chamado DE/Best, que funciona da seguinte forma: para cada uma das  $NP$  soluções candidatas ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  chamado de vetor alvo), sorteia-se duas soluções na população  $\mathbf{x}_{r_1}$  e  $\mathbf{x}_{r_2} \in \mathbb{R}^n$ , diferentes entre si e diferentes do vetor alvo. Um vetor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  (chamado de vetor doador) é então calculado pela fórmula a seguir:  $\mathbf{v} = \mathbf{x}^* + F(\mathbf{x}_{r_1} - \mathbf{x}_{r_2})$ , em que  $F \in \mathbb{R}$  é um parâmetro de multiplicação maior do que zero e  $\mathbf{x}^*$  a melhor solução obtida até o momento. O vetor experimental  $\mathbf{u}$  é encontrado após a aplicação do processo de cruzamento, que mistura informações apresentadas pelas soluções  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{v}$ . Para isso, um inteiro aleatório  $j$  entre 1 e  $n$  é sorteado e para cada  $i = 1, \dots, n$ , um número aleatório  $rand_i$  entre 0 e 1 também é sorteado. Se  $rand_i \leq CR$  (probabilidade de cruzamento definida pelo usuário) ou  $i = j$ , então  $u_i = v_i$ , caso contrário,  $u_i = x_i$ . A condição  $i = j$  garante a cópia de pelo menos uma variável do vetor doador, onde  $j$  é uma entrada do vetor  $\mathbf{x}$  escolhida aleatoriamente.

A técnica de tratamento de restrições APM transforma um problema de otimização com restrições em um problema irrestrito através de um esquema que penaliza o valor da função objetivo para os indivíduos infeasíveis.

A função aptidão  $F(\mathbf{x})$  da técnica APM é definida por:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \text{ é factível,} \\ \bar{f}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^J k_j v_j(\mathbf{x}) & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4)$$

em que

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } f(\mathbf{x}) > \langle f(\mathbf{x}) \rangle, \\ \langle f(\mathbf{x}) \rangle & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5)$$

e  $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$  é a média da função objetivo para a população.

Os coeficientes de penalização  $k_j$  são definidos por

$$k_j = |\langle f(\mathbf{x}) \rangle| \frac{\langle v_j(\mathbf{x}) \rangle}{\sum_{i=1}^J [\langle v_i(\mathbf{x}) \rangle]^2}, \quad (6)$$

em que  $v_j(\mathbf{x})$  é a violação da restrição  $j$  pelo indivíduo  $\mathbf{x}$  definida por  $v_j(\mathbf{x}) = \max(g_j(\mathbf{x}), 0)$  e  $\langle v_j(\mathbf{x}) \rangle$  é a média da violação da restrição  $j$  na população.

Originalmente, o IWOA foi projetado para resolver problemas sem restrições. Dessa forma, propõe-se aqui estender o IWOA a problemas com restrições através do acoplamento com a técnica APM, doravante denominado IWOA+APM. O pseudocódigo do IWOA+APM está detalhado no Algoritmo 1. No IWOA+APM, o  $\mathbf{x}_t^*$  é definido como sendo a melhor solução factível obtida até a iteração  $t$ . Caso o IWOA+APM não tenha alcançado ainda uma solução factível até a iteração  $t$ , considera-se  $\mathbf{x}_t^* = \mathbf{x}_t^{rand}$ .

### 3 Resultados e Discussões

Neste trabalho, 8 problemas de otimização com restrições aplicados a projetos de engenharia foram adotados para os experimentos computacionais (Tabela 1). Esses problemas fazem parte do suite *benchmark* da competição de metaheurísticas evolutivas *Constrained Optimization Problems from the Real-World* do *IEEE Congress on Evolutionary Computation - CEC 2020*. A descrição completa dos problemas está disponível em [8]. Três desses problemas foram também utilizados em [7] para avaliar o desempenho da técnica APM e suas variantes em um algoritmo genético do tipo *steady-state*.

A Tabela 1 também mostra os resultados obtidos pelo IWOA+APM com o mesmo número de avaliações da função objetivo ( $10^5$  para problemas com  $n \leq 10$  e  $2 \times 10^5$  para problemas com  $10 < n \leq 30$ ) e a mesma quantidade de 25 execuções independentes indicadas em [8], considerando  $NP = 100$ . Esses resultados são comparados com aqueles obtidos pelo algoritmo SASS [9], o campeão da competição do CEC 2020 <sup>4</sup>. As melhores médias de cada problema estão destacadas em negrito.

Para permitir uma comparação com os resultados encontrados em [7], a Tabela 2 mostra os resultados obtidos pelo IWOA+APM com o mesmo número de avaliações da função objetivo, a mesma quantidade de 50 execuções independentes e o mesmo tamanho de população  $NP = 200$ , conforme descritos em [7]. Os resultados são comparados com aqueles obtidos pelo algoritmo genético do tipo *steady-state* acoplado a técnica APM original [7].

O IWOA+APM obteve a mesma média que o SASS em 5 problemas e o mesmo resultado da coluna Melhor em 7 desses problemas (Tabela 1), mostrando que ele foi competitivo ao SASS. Isso é considerado um bom desempenho do IWOA+APM, já que o SASS é o campeão da competição do CEC 2020. Vale ressaltar que o SASS obteve variância nula em 7 dos 8 problemas, ou seja, obteve todos os 25 valores iguais a solução de cada um desses problemas.

Na Tabela 2, é possível verificar que o IWOA+APM foi melhor que o algoritmo genético do tipo *steady-state* nos problemas *Pressure vessel* e *Speed reducer* em todos os itens, pois apresentou os menores valores para média, desvio padrão, melhor resultado e pior resultado. Já no problema *Tension/compression spring design*, o IWOA+APM obteve a mesma média e o mesmo melhor resultado que aquele obtido pelo referido algoritmo. Ainda nesse problema, o IWOA+APM obteve menores valores para o desvio padrão e para o pior resultado. Assim, de um modo geral, o IWOA+APM teve um desempenho muito melhor que o algoritmo genético do tipo *steady-state* nesse grupo de problemas.

<sup>4</sup><https://github.com/P-N-Suganthan/2020-RW-Constrained-Optimisation>

---

**Algoritmo 1** IWOA+APM.

---

```

1: Cria-se aleatoriamente uma população de  $NP$  baleias de posição  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, NP$ .
2:  $t \leftarrow 0$  contador de gerações.
3: enquanto  $t \leq t_{max}$  faça
4:    $F \leftarrow$  função objetivo de cada baleia penalizada pela técnica APM definida pelas Equações 4, 5 e 6.
5:   para  $i = 1 : NP$  faça
6:     Atualize os valores de  $\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{C}, l, p$  e  $\lambda$ , sendo  $p$  um número aleatório entre 0 e 1 e  $\lambda = 1 - t/t_{max}$ .
7:     para  $j = 1 : n$  faça
8:       se  $p \leq \lambda$  então
9:         se  $rand \leq CR$ , onde  $rand$  é um número aleatório entre 0 e 1, então
10:           $\mathbf{u}_i(j)$  é atualizado por ED.
11:        senão
12:           $\mathbf{u}_i(j)$  é atualizado pela Equação 2.
13:        fim se
14:      senão
15:        se  $rand \leq 0.5$ , onde  $rand$  é um número aleatório entre 0 e 1, então
16:           $\mathbf{u}_i(j)$  é atualizado pela Equação 2, trocando  $\mathbf{x}_i^{rand}$  por  $\mathbf{x}_i^*$ .
17:        senão
18:           $\mathbf{u}_i(j)$  é atualizado pela Equação 3.
19:        fim se
20:      fim se
21:      Mantenha  $\mathbf{u}_i(j)$  dentro do intervalo dos limites inferior e superior (caso  $\mathbf{u}_i(j)$  ultrapasse algum dos limites, ele recebe o valor do próprio limite).
22:    fim para
23:  fim para
24:  para  $i = 1 : NP$  faça
25:    se  $F(\mathbf{u}_i) < F(\mathbf{x}_i)$  então
26:       $\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{u}_i$ 
27:    senão
28:       $\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{x}_i$ 
29:    fim se
30:  fim para
31:   $t \leftarrow t + 1$ 
32: fim enquanto

```

---

Tabela 1: Resultados Obtidos pelo IWOA+APM e pelo SASS nos 8 Problemas, onde  $n$  é o número de variáveis e  $J$  o número de restrições de cada problema.

Problema	Resultados	Média	Desvio Padrão	Melhor	Pior
1	<i>Pressure vessel design (n = 4 e J = 4)</i>				
	IWOA+APM	$6.3485 \times 10^3$	$4.28 \times 10^2$	$6.0597 \times 10^3$	$7.5445 \times 10^3$
	SASS	<b><math>6.0597 \times 10^3</math></b>	0.00	$6.0597 \times 10^3$	$6.0597 \times 10^3$
2	<i>Weight Minimization of a Speed Reducer (n = 7 e J = 11)</i>				
	IWOA+APM	<b><math>2.9944 \times 10^3</math></b>	0.00	$2.9944 \times 10^3$	$2.9944 \times 10^3$
	SASS	<b><math>2.9944 \times 10^3</math></b>	0.00	$2.9944 \times 10^3$	$2.9944 \times 10^3$
3	<i>Tension/compression spring design (case 1) (n = 3 e J = 4)</i>				
	IWOA+APM	<b><math>1.2665 \times 10^{-2}</math></b>	$1.69 \times 10^{-7}$	$1.2665 \times 10^{-2}$	$1.2666 \times 10^{-2}$
	SASS	<b><math>1.2665 \times 10^{-2}</math></b>	0.00	$1.2665 \times 10^{-2}$	$1.2665 \times 10^{-2}$
4	<i>Welded beam design (n = 4 e J = 5)</i>				
	IWOA+APM	<b>1.6702</b>	0.00	1.6702	1.6702
	SASS	<b>1.6702</b>	0.00	1.6702	1.6702
5	<i>Three-bar truss design problem (n = 2 e J = 3)</i>				
	IWOA+APM	<b><math>2.6390 \times 10^2</math></b>	0.00	$2.6390 \times 10^2$	$2.6390 \times 10^2$
	SASS	<b><math>2.6390 \times 10^2</math></b>	0.00	$2.6390 \times 10^2$	$2.6390 \times 10^2$
6	<i>10-bar Truss Optimization with Frequency Constraints (n = 10 e J = 3)</i>				
	IWOA+APM	$5.2751 \times 10^2$	2.65	$5.2516 \times 10^2$	$5.3330 \times 10^2$
	SASS	<b><math>5.2447 \times 10^2</math></b>	0.01	$5.2446 \times 10^2$	$5.2448 \times 10^2$
7	<i>Topology Optimization (n = 30 e J = 30)</i>				
	IWOA+APM	<b>2.6394</b>	0.00	2.6394	2.6394
	SASS	<b>2.6394</b>	0.00	2.6394	2.6394
8	<i>Optimal Design of Industrial refrigeration System (n = 14 e J = 15)</i>				
	IWOA+APM	$3.2404 \times 10^{-2}$	$4.33 \times 10^{-4}$	$3.2213 \times 10^{-2}$	$3.4090 \times 10^{-2}$
	SASS	<b><math>3.2213 \times 10^{-2}</math></b>	0.00	$3.2213 \times 10^{-2}$	$3.2213 \times 10^{-2}$

## 4 Conclusões

Esse trabalho propôs uma extensão do algoritmo IWOA a problemas com restrições através do acoplamento de uma técnica de penalização adaptativa denominada APM. O algoritmo proposto IWOA+APM foi utilizado para resolver 8 problemas de otimização com restrições aplicados a projetos de engenharia que fazem parte da competição do CEC 2020. Os resultados obtidos pelo IWOA+APM foram comparados aos resultados do algoritmo SASS, o campeão da competição, e também aos obtidos por um algoritmo genético do tipo *steady-state*, também acoplado à técnica APM. Os resultados mostraram que o IWOA+APM foi competitivo ao SASS na maioria dos problemas, além de obter melhores resultados que o algoritmo genético do tipo *steady-state* acoplado à técnica APM. Uma versão do IWOA+APM para problemas de otimização multiobjetivo estão entre as possibilidades de trabalhos futuros.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPQ, CAPES e à FAPEMIG (TEC APQ 00408-21 TEC e PPM-00174-18) pelo apoio financeiro.

Tabela 2: Resultados Obtidos pelo IWOA+APM comparados aos encontrados em [7].

Resultados	Média	Desvio Padrão	Melhor	Pior
<i>Pressure vessel</i>				
IWOA+APM	<b>6323.773</b>	375.676	6059.761	7544.493
[7]	6647.418	7.24e+02	6059.846	8581.168
<i>Speed reducer</i>				
IWOA+APM	<b>2994.425</b>	0.001	2994.425	2994.427
[7]	3024.505	5.50e+01	2996.348	3379.181
<i>Tens./comp. spring</i>				
IWOA+APM	<b>0.013</b>	0.0004	0.013	0.015
[7]	<b>0.013</b>	1.02e-03	0.013	0.018

## Referências

- [1] Mirjalili, S. e Lewis, A. The whale optimization algorithm. *Advances in Engineering Software*, 95:51–67, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2016.01.008>
- [2] Gharehchopogha, F. S. e Gholizadehb, H. A comprehensive survey: Whale Optimization Algorithm and its applications. *Swarm and Evolutionary Computation*, 48:1–24, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.swevo.2019.03.004>
- [3] Bozorgi, S. M. e Yazdani, S. IWOA: An improved whale optimization algorithm for optimization problems. *Journal of Computational Design and Engineering*, 6(3):243–259, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.jcde.2019.02.002>
- [4] Storn, R. e Price, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization*, 11(4):341–359, 1997. <https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>
- [5] Barbosa, H.J.C. e Lemonge, A.C.C. An adaptive penalty scheme in genetic algorithms for constrained optimization problems, *Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference. GECCO 2002*, New York, USA, pages 287-294, 2002. <https://dl.acm.org/doi/10.5555/2955491.2955543>
- [6] Vargas, D.E.C., Lemonge, A.C.C., Barbosa, H.J.C. e Bernardino, H.S. Differential evolution with the adaptive penalty method for structural multi-objective optimization. *Optimization and Engineering*, 20:65–88, 2019. <https://doi.org/10.1007/s11081-018-9395-4>
- [7] Lemonge, A.C.C., Barbosa, H.J.C. e Bernardino, H.S. Variants of an adaptive penalty scheme for steady-state genetic algorithms in engineering optimization. *Engineering Computations*, 32(8):2182–2215, 2015. <https://doi.org/10.1108/EC-07-2014-0158>
- [8] Kumar, A., Wu, G., Ali, M. Z., Mallipeddi, R., Suganthan, P. N. e Das, S. A test-suite of non-convex constrained optimization problems from the real-world and some baseline results. *Swarm and Evolutionary Computation*, 56, 100693, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.swevo.2020.100693>
- [9] Kumar, A., Das, S., e Zelinka, I. A self-adaptive spherical search algorithm for real-world constrained optimization problems, *Proceedings of the 2020 Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion. GECCO 2020*, New York, USA, pages 13-14, 2020. <https://doi.org/10.1145/3377929.3398186>