Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Método de Newton Inexato com Aproximações Combinadas Iterativas em Problemas de Otimização Topológica sob Não Linearidade Geométrica

Thadeu A. Senne[1]
ICT/UNIFESP, São José dos Campos, SP
Francisco A. M. Gomes Neto[2] Sandra A. Santos[3]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP

Um dos problemas mais comuns em Otimização Topológica é a minimização da flexibilidade média de uma estrutura rígida, sujeita às suas condições de equilíbrio estático e a uma restrição de volume máximo de material disponível. Em várias situações, é necessário supor uma relação não linear elástica entre deformações e deslocamentos, o que significa que a estrutura está sob não linearidade geométrica. Neste caso, a avaliação da função objetivo exige a resolução de um sistema não linear de equações que modelam os deslocamentos nodais, devido à aplicação de forças externas. Em geral, as soluções aproximadas destes sistemas são encontradas por meio do método de Newton, sendo esta a etapa mais custosa no processo de resolução do problema de Otimização Topológica. Levando isso em consideração, apresentamos, neste trabalho, estratégias para reduzir este custo no cálculo da função objetivo, baseadas na técnica de *aproximações combinadas* [1], gerando um método de Newton inexato. Os problemas de Otimização Topológica são resolvidos por meio de um método de Programação Linear Sequencial por Partes (SPLP) [2].

O sistema não linear que deve ser resolvido para calcular o valor da função objetivo de um problema de Otimização Topológica sob não linearidade geométrica é da forma

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{0}\,, \qquad \text{em que} \qquad \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{f}\,, \tag{1}$$

$\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^{n_{el}}$ é o vetor de densidades de material em cada um dos n_{el} elementos finitos associados ao domínio discretizado (no qual a estrutura deverá estar contida), $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{2n_{nd}}$ é o vetor de deslocamentos nodais (horizontais e verticais) em cada um dos n_{nd} nós deste domínio, $\boldsymbol{f}_{int}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{2n_{nd}}$ é o vetor de forças nodais internas e $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{2n_{nd}}$ é o vetor de forças nodais externas. Dizemos que $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{\rho})$ é o *resíduo* associado ao sistema não linear (1).

Dado um ponto inicial $\boldsymbol{u}^{(0)}$ e mantendo $\boldsymbol{\rho}$ fixo, em cada iteração do método de Newton, resolvemos o sistema linear

$$\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u}^{(\ell)},\, \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{s} \,=\, -\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}^{(\ell)},\, \boldsymbol{\rho}), \tag{2}$$

em que $\boldsymbol{K}_T \equiv \boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{\rho}) \in \mathbb{R}^{2n_{nd}\times 2n_{nd}}$ é a matriz Jacobiana do sistema não linear (1), conhecida como *matriz de rigidez tangente global*, que é simétrica. A solução do sistema linear (2), denotada por $\boldsymbol{s}^{(\ell)}$, é utilizada para obter a nova solução aproximada $\boldsymbol{u}^{(\ell+1)} = \boldsymbol{u}^{(\ell)} + \boldsymbol{s}^{(\ell)}$. Podemos considerar que $\boldsymbol{u}^{(\ell)}$ é uma boa aproximação para a solução do sistema não linear (1) quando $\|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{u}^{(\ell)},\, \boldsymbol{\rho})\| < \varepsilon$, em que ε é uma constante positiva suficientemente pequena.

[1]senne@unifesp.br
[2]chico2@unicamp.br
[3]sasantos@unicamp.br

A fatoração de $\boldsymbol{K}_T$ é a etapa mais cara no processo de resolução do sistema linear (2). Desta forma, com o intuito de reduzir o custo computacional na resolução deste sistema, propomos, neste trabalho, a estratégia descrita a seguir.

Seja $\boldsymbol{K}_{T0}$ a matriz Jacobiana calculada na i-ésima iteração do método de Newton. Supondo que sua fatoração LDL^T esteja disponível, ela será reutilizada nas m iterações subsequentes, e será recalculada na iteração $i+m+1$. Denotando por $\boldsymbol{K}_T$ a matriz Jacobiana da iteração $i+j$ (com $1 \leq j \leq m$) , podemos reescrever o sistema linear (2) como

$$(\boldsymbol{K}_{T0} + \Delta \boldsymbol{K})\boldsymbol{s} \;=\; -\boldsymbol{r}, \tag{3}$$

em que $\Delta \boldsymbol{K} := \boldsymbol{K}_T - \boldsymbol{K}_{T0}$. Após rearranjar os termos em (3), obtemos $\boldsymbol{s} \;=\; \widetilde{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{s}$, em que $\widetilde{\boldsymbol{s}} := -\boldsymbol{K}_{T0}^{-1}\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{K}_{T0}^{-1}\Delta \boldsymbol{K}$. Logo, usando estas três relações, definimos a sequência

$$\boldsymbol{s}^{(k+1)} \;=\; \widetilde{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{s}^{(k)}, \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots . \tag{4}$$

Provamos que, se $\|\boldsymbol{B}\| < 1$, a sequência $\left\{\boldsymbol{s}^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ definida em (4) converge para a única solução $\boldsymbol{s}^*$ do sistema linear (2), com taxa linear. Esta sequência define o método iterativo proposto neste trabalho para obter uma solução aproximada do sistema linear (2), chamado *Aproximações Combinadas Iterativas*. Desta forma, ao aplicar este método para resolver (2), obtemos um método de Newton inexato. Adotamos um critério de parada baseado na magnitude relativa do resíduo do sistema linear (2), em cada iteração ℓ do método de Newton.

Neste trabalho, cinco estratégias distintas baseadas no método apresentado acima foram propostas para controlar a frequência das fatorações das matrizes Jacobianas do sistema não linear (1). Com o objetivo de acelerar o esquema iterativo geral mantendo a precisão das soluções aproximadas, três das estratégias também utilizam o método de Aproximações Combinadas Iterativas para o sistema linear adjunto associado à análise de sensibilidade. A robustez das estratégias é corroborada por meio de experimentos numéricos com quatro problemas de referência – duas estruturas e dois mecanismos flexíveis. Os resultados mostram que a redução no tempo total de resolução dos problemas de Otimização Topológica podem chegar a 70 % com a adoção dos métodos de Newton inexatos propostos, em comparação ao método de Newton clássico, no qual a fatoração da matriz Jacobiana deve ser refeita a cada iteração [3].

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro (Projeto Temático - processo 2018/24293-0).

Referências

[1] O. Amir, U. Kirsch e I. Sheinman. "Efficient non-linear reanalysis of skeletal structures using combined approximations". Em: **International Journal for Numerical Methods in Engineering** 73 (2008), pp. 1328–1346. DOI: 10.1002/nme.2128.

[2] F. A. M. Gomes e T. A. Senne. "An algorithm for the topology optimization of geometrically nonlinear structures". Em: **International Journal for Numerical Methods in Engineeering** 99 (2014), pp. 309–409. DOI: 10.1002/nme.4686.

[3] T. A. Senne, F. A. M. Gomes e S. A. Santos. "Inexact Newton combined approximations in the topology optimization of geometrically nonlinear elastic structures and compliant mechanisms". Em: https://arxiv.org/abs/2112.09040 (2021). DOI: 10.48550/ARXIV.2112.09040.

