Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Polinômios ortogonais e fórmulas de quadratura no círculo unitário e no intervalo $[-1, 1]$

Charles F. dos Santos* **Vanessa Paschoa**
Departamento de Ciência e Tecnologia, ICT, UNIFESP,
12231-280, São José dos Campos, SP
E-mail: charles.ferreira@unifesp.br, vanessa.paschoa@unifesp.br.

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos como obter as fórmulas de quadratura de Gauss (com extensão aos casos de Radau e Lobatto) a partir de fórmulas de quadratura no círculo unitário.

Polinômios ortogonais no círculo unitário Denote por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ o círculo unitário do plano complexo. Seja $\omega : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ uma função tal que a forma $\langle \ , \ \rangle : \mathbb{P}(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ dada por

$$\langle p, q\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})}\omega(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

defina um produto interno no espaço vetorial $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ das funções polinomiais complexas. Diremos que ω é uma *função peso em* $\mathbb{T}$. Uma sequência de polinômios $(\Phi_n(z))_{n\geq 0}$ tal que $\Phi_n(z)$ tem sempre grau n, $\langle \Phi_n, \Phi_k\rangle = 0$ se $n \neq k$ e $\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle$ é real positivo é chamada *sequência de polinômios ortogonais em relação a* ω. A exigência de que todos os $\Phi_n(z)$ sejam mônicos garante a unicidade da sequência.

As propriedades elementares dos Φ_n são tratadas, por exemplo, em [3]. Entre elas, está o fato de que os zeros de $\Phi_n(z)$ ($n \geq 1$) pertencem ao disco unitário aberto, ou seja, têm módulo menor que 1. Merecem destaque também as fórmulas de recorrência, dadas por

$$\Phi_{n+1}(z) = z\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_n^*(z),$$
$$\Phi_{n+1}(z) = (1 - |\Phi_{n+1}(0)|^2)\, z\,\Phi_n(z) + \Phi_{n+1}(0)\Phi_{n+1}^*(z),$$

para $n \geq 1$, assumindo aqui que todos os Φ_n são mônicos. A notação * se refere ao *polinômio recíproco*, definido por $p^*(z) = z^n\overline{p}(z^{-1})$, onde n é o grau do polinômio $p(z)$.

Quadratura de Szegő Considere agora o problema de aproximar uma integral em $\mathbb{T}$ por uma fórmula que dependa apenas dos valores do integrando em pontos pré-fixados, ou seja,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)\,\mathrm{d}\theta \approx \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(z_k),$$

onde ω é uma função peso em $\mathbb{T}$, os λ_k, chamados *pesos*, não dependem de f e os x_k, chamados *nós*, também são fixos, $k = 1, \ldots, n$. Uma fórmula do tipo acima é chamada *fórmula de quadratura*, e se houver "$=$" no lugar de "$\approx$" para um certa função f, dizemos que a quadratura é *exata* para f.

É possível construir fórmulas de quadratura de n nós que sejam exatas para todas as funções em um certo espaço vetorial de dimensão $2n - 1$; além disso, tal espaço é maximal. No entanto, diferentemente do que ocorre com polinômios ortogonais na reta, não se pode usar como nós os zeros dos polinômios ortogonais com relação a ω, uma vez que eles não pertencem a $\mathbb{T}$.

Dado $n \geq 1$, considere o polinômio $\Phi_n(z) + \tau\Phi_n^*(z)$, onde $|\tau| = 1$. Seus zeros são sempre distintos e pertencem a $\mathbb{T}$, portanto podem ser usados como nós da quadratura.

*bolsista de Iniciação Científica FAPESP

Teorema. *Denote* $\Lambda_{-(n-1),n-1} = \text{span}\,\{z^k \ : \ -(n-1) \leq k \leq n-1\}$. *Seja* ω *uma função peso em* $\mathbb{T}$ *e fixe* $n \geq 1$ *e* $\tau \in \mathbb{T}$ *qualquer; sejam* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *as raízes de* $\Phi_n(z) + \tau\Phi_n^*(z)$. *Existem* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *fixos, que são reais positivos, tais que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\omega(\theta)\, d\theta = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\xi_k) := S_n(f), \quad \forall f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}. \tag{1}$$

Por outro lado, se uma fórmula de quadratura com n *nós é exata para toda* $f \in \Lambda_{-(n-1),n-1}$, *então seus nós são as raízes de* $\Phi_n(z) + \tau\Phi_n^*(z)$, *onde* $|\tau| = 1$.

Por fim, não existe fórmula de quadratura exata para toda $f \in \Lambda_{-(n-1),n}$ *ou toda* $f \in \Lambda_{-n,n-1}$.

A regra de quadratura S_n como no teorema acima se chama *fórmula de quadratura de Szegő*.

Obtendo quadraturas em $\mathbb{T}$ a partir da quadratura em $[-1, 1]$ Seja σ uma função peso no intervalo $[-1, 1]$. Definindo $\omega(\theta) = \sigma(\cos\theta)\,|\sin\theta|$, temos que ω é uma função peso no círculo unitário, é simétrica e seus polinômios ortogonais mônicos $\Phi_n(z)$ têm coeficientes todos reais. É possível obter os polinômios ortogonais em relação a σ a partir dos Φ_n ([3], teorema 11.5).

Considere as quadraturas de Gauss, Gauss-Radau e Gauss-Lobatto em $[-1, 1]$, que têm a forma geral

$$\int_{-1}^{1} F(x)\sigma(x)\,\mathrm{d}x \approx Af(1) + Bf(-1) + \sum_{k=1}^{m} A_k f(x_k), \tag{2}$$

onde $x_k = \cos\theta_k$, $k = 1, \ldots, m$; no caso Gauss $A = B = 0$ e x_k são os zeros do m-ésimo polinômio ortogonal com relação a $\sigma(x)$, no caso de Gauss-Radau $A = 0$ ou $B = 0$ e x_k são os zeros do m-ésimo polinômio ortogonal com relação a $(1-x)\sigma(x)$ ou $(1+x)\sigma(x)$ e no caso de Gauss-Lobatto x_k são os zeros do m-ésimo polinômio ortogonal com relação a $(1-x^2)\sigma(x)$.

Teorema. *Sejam* σ *uma função peso no intervalo* $[-1, 1]$ *e* ω *uma função peso no círculo unitário tais que* $\omega(\theta) = \sigma(\cos\theta)\,|\sin\theta|$, $\theta \in (-\pi, \pi]$. *Seja* S_n *a fórmula de quadratura de Szegő para* ω *como em* (1) *com* $\xi_k = e^{i\theta_k}$.

(i) *Se* $n = 2m$ *e* $\tau = 1$ *então* $S_n(f) = \sum_{k=1}^{m} A_k[f(\xi_k) + f(\overline{\xi_k})]$ *com* A_k *e* θ_k *dados por* (2) *no caso Gauss.*

(ii) *Se* $n = 2m$ *e* $\tau = -1$ *então* $S_n(f) = 2Af(1) + 2Bf(-1) + \sum_{k=1}^{m-1} A_k[f(\xi_k) + f(\overline{\xi_k})]$ *com* A, B, A_k *e* θ_k *dados por* (2) *no caso Gauss-Lobatto;*

(iii) *Se* $n = 2m + 1$ *e* $\tau = 1$ *então* $S_n(f) = 2Bf(-1) + \sum_{k=1}^{m} A_k[f(\xi_k) + f(\overline{\xi_k})]$ *com* B, A_k, θ_k *dados por* (2) *no caso Gauss-Radau;*

(iv) *Se* $n = 2m + 1$ *e* $\tau = -1$ *então* $S_n(f) = 2Af(1) + \sum_{k=1}^{m} A_k[f(\xi_k) + f(\overline{\xi_k})]$ *com* A, A_k *e* θ_k *dados por* (2) *no caso Gauss-Radau.*

Pelo teorema acima, os pesos das fórmulas "tipo Gauss" coincidem com os das fórmulas de Szegő (a não ser por um fator 2 nos extremos) e seus nós são as partes reais dos nós da quadratura de Szegő.

Palavras-chave: *Polinômios Ortogonais, Polinômios de Szegő, Quadratura Gaussiana, Quadratura de Szegő, Polinômios Para-Ortogonais*

Referências

[1] A. Bultheel; L. Daruis; P. González-Vera, A connection between quadrature formulas on the unit circle and the interval $[-1, 1]$, *Journal of Comp. and Appl. Math.*, 132 (2001) 1-14.

[2] F. A. Martins, "Polinômios Para-Ortogonais e Análise de Frequência", Dissertação de Mestrado, IBILCE-Unesp, 2005.

[3] G. Szegő, "Orthogonal Polynomials", AMS Colloquium Series, vol. 23, 4th ed., American Mathematical Society, Providence, RI, 1975.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0031