

Interpolação Polinomial Multivariada

Júlia D. Guizardi¹ Francisco N. C. Sobral²

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR

Seja uma função $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, na qual sabemos seu valor funcional para um conjunto de pontos $\mathbb{L} \subset \mathbb{R}^d$. A interpolação polinomial consiste na ideia de construir um polinômio, $P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $P(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{L}$. O conjunto L é dito posicionado, ou posicionado para a interpolação de Lagrange, [1] quando P existe e é único.

A interpolação polinomial nos ajuda a resolver diversos tipos de problemas, como a análise de experimentos científicos [2], integração numérica [3] e otimização [4]. O interesse em calcular polinômio interpolador ocorre principalmente devido ao conhecimento do valor funcional de apenas um conjunto finito de pontos. Há ainda casos em que a função é conhecida e pode ser avaliada em diversos pontos, mas o seu cálculo exige operações muito custosas.

O objetivo deste estudo é encontrar e programar um método de calcular polinômios interpoladores para um conjunto de pontos de apoio dado em \mathbb{R}^d , ou seja, um polinômio interpolador multivariado. Assumindo um conjunto \mathbb{L} posicionado, existem diversas formas de construir um polinômio interpolador. Neste trabalho, estamos interessados na extensão dos polinômios interpoladores de Lagrange para o caso multidimensional [1].

Vamos definir Π_n^d como o espaço dos polinômios em d variáveis com grau no máximo n . Uma base para esse espaço é a base dos monômios. Como um exemplo, a base dos monômios para Π_2^3 é $\{1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1\xi_2, \xi_1\xi_3, \xi_2\xi_3, \xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2\}$, onde 1 representa a função constante e igual a 1 (monômio de grau 0). É fácil observar que a base dos monômios possui naturalmente blocos, nos quais o grau dos monômios é o mesmo. No exemplo anterior, temos 3 blocos, associados com grau 0, 1 e 2.

Fixando d e assumindo a existência e unicidade do polinômio interpolador no conjunto \mathbb{L} , primeiramente separamos os pontos de \mathbb{L} em blocos, seguindo a mesma estrutura de blocos da base de monômios. Desta forma, denotando por r_n^d o número de monômios d -dimensionais com grau exatamente n , podemos reescrever \mathbb{L} da seguinte forma:

$$\mathbb{L} = \left\{ x_1^{(0)} \mid x_1^{(1)}, \dots, x_{r_1^d}^{(1)} \mid \dots \mid x_1^{(n_0)}, \dots, x_{r_{n_0}^d}^{(n_0)} \mid \dots \right\} = \{ \mathbf{x}^0 \ \mathbf{x}^1 \ \dots \ \mathbf{x}^{n_0} \ \dots \}.$$

Com tal feito, estudamos duas ferramentas para a construção do polinômio interpolador. A primeira consiste nos polinômios fundamentais de Newton, denotados por $p_j^{[n_0]} \in \Pi_{n_0}^d$, com $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$ e $j = 1, \dots, r_{n_0}^d$. Cada bloco n_0 de polinômios fundamentais está associada a um bloco \mathbf{x}^{n_0} . Os polinômios devem satisfazer a propriedade de se anularem em todos os pontos de blocos anteriores, $i = 0, \dots, n_0 - 1$, e devem valer 1 em apenas um ponto do seu bloco. Com isso, estão unicamente definidos e seu cálculo pode ser efetuado com aplicações simples de Álgebra [5]. A outra ferramenta consiste na versão generalizada das diferenças divididas, denotadas por $\lambda_{n_0} [\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^{n_0-1}, x] f$, $x \in \mathbb{R}^d$. Quando $d = 1$, é possível mostrar que tais valores estão associados às diferenças divididas tradicionais [3], além disso, as diferenças divididas generalizadas também servem como multiplicadores de polinômios na construção do polinômio interpolador.

¹ra107304@uem.br

²fncsobral@uem.br

Utilizando polinômios fundamentais de Newton e diferenças divididas generalizadas, provamos o teorema apresentado em [1], que fornece a forma de calcular o polinômio interpolador, dada por

$$P(x) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^{r_j^d} \lambda_j[\mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^{j-1}, x_i^{(j)}] f \cdot p_i^{[j]}(x). \quad (1)$$

Implementamos um algoritmo na linguagem Julia e realizamos diversos experimentos numéricos com funções conhecidas para avaliar o bom funcionamento do método. Os polinômios encontrados foram utilizados para tentar obter aproximações para minimizadores para algumas funções de [6].

Como exemplo, na Figura 1(a) podemos ver a aproximação da função de Matyas [6], dada por $m(x) = 0.26(x_1^2 + x_2^2) - 0.48x_1x_2$. Escolhemos um conjunto de 6 pontos para formar o conjunto \mathbb{L} , para os quais o valor de m foi dado. O resultado pode ser observado na imagem (b) da Figura 1, onde temos a projeção no plano xy tanto das curvas de nível da função m nas curvas cheias, quanto do polinômio interpolador nas linhas, além dos pontos de \mathbb{L} destacados em verde. É possível notar a precisão do polinômio interpolador em comparação a função original, isso ocorre uma vez que polinômio interpolador é calculado para $n = 2$, que é justamente o grau da função de Matyas.

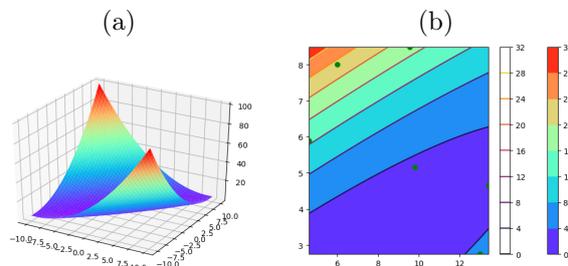


Figura 1: (a) Função de Matyas. (b) Curvas de nível do polinômio interpolador encontrado representado nas linhas, curvas de nível da função original nas curvas cheias e pontos de \mathbb{L} em verde.

Referências

- [1] Thomas Sauer e Yuan Xu. “On multivariate Lagrange interpolation”. Em: **Mathematics of computation** 64.211 (1995).
- [2] Marcília Rosado de Castro et al. “Biofilm formation on stainless steel as a function of time and temperature and control through sanitizers”. Em: **International dairy journal** 68 (2017), pp. 9–16.
- [3] Márcia A Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Makron Books do Brasil, 1997.
- [4] Andrew R Conn, Katya Scheinberg e Ph L Toint. “Recent progress in unconstrained nonlinear optimization without derivatives”. Em: **Mathematical programming** 79.1 (1997), pp. 397–414.
- [5] Howard Anton e Chris Rorres. **Álgebra linear com aplicações**. Vol. 8. Bookman Porto Alegre, 2001.
- [6] Jorge J Moré, Burton S Garbow e Kenneth E Hillstom. “Testing unconstrained optimization software”. Em: **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)** 7.1 (1981), pp. 17–41.