Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Princípio do Máximo Fraco Assintótico

Rodrigo B. Moreira[1] Valeriano A. de Oliveira[2]
Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Câmpus de São José do Rio Preto, SP

Neste trabalho estudamos condições necessárias de otimalidade sequenciais para certos problemas de controle ótimo envolvendo restrições de controle mistas na forma de desigualdades. A motivação desta investigação vem da programação não linear, mais especificamente das condições AKKT, caso finito [1] e caso infinito [2]. Dadas as funções $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f : [0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m_g}$ e o conjunto $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, o Problema (P) é definido como:

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimizar} \quad \ell(x(0), x(1))\\
&\text{sujeito a}\\
&\qquad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p.} \quad t \in [0,1], && (1)\\
&\qquad\quad 0 \geq g(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p.} \quad t \in [0,1], && (2)\\
&(x(0), x(1)) \in C. && (3)
\end{aligned}
$$

Um processo é um par (x,u) formado por um controle $u \in L^\infty([0,1];\mathbb{R}^m)$ e um arco $x \in W^{1,1}([0,1];\mathbb{R}^n)$ (espaço das funções absolutamente contínuas) que é solução de (1) [5, pág. 202]. Um processo admissível $(\bar{x},\bar{u})$ (processo que satisfaz (1), (2) e (3)) é dito mínimo local fraco de (P) se existir $\delta' > 0$ tal que $\ell(\bar{x}(0), \bar{x}(1)) \leq \ell(x(0), x(1))$ para todos os processos admissíveis (x,u) tais que $(x(t), u(t)) \in \Omega_{\delta'}(t) := \{(y, v) \in \mathbb{R}^{n+m} : |(y, v) - (\bar{x}(t), \bar{u}(t))| \leq \delta'\}$ para quase todo $t \in [0,1]$.

Definição 1 (Sequências AWMP)**.** Uma sequência $\{(x_k, u_k, p_k, r_k, \lambda_k)\}$ em $W^{1,1}([0,1];\mathbb{R}^n) \times L^\infty([0,1];\mathbb{R}^m) \times W^{1,1}([0,1];\mathbb{R}^n) \times L^1([0,1];\mathbb{R}^{m_g}) \times [0,+\infty)$ é chamada de *sequência WMP assintótica* (*sequência AWMP*) se existirem sequências $\{(\eta_k^{(1)}, \eta_k^{(2)})\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $\{\nu_k\} \subset L^1([0,1];\mathbb{R}_+)$ e $\{(\tau_k^{(1)}, \tau_k^{(2)})\} \subset \mathbb{R}^{2n}$ com $(\eta_k^{(1)}, \eta_k^{(2)}) \to (0,0)$, $\nu_k(t) \downarrow 0$ para todo $t \in [0,1]$, $(\tau_k^{(1)}, \tau_k^{(2)}) \to (0,0)$ tais que, para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo $t \in [0,1]$,

(i) $\lambda_k + \|p_k\|_{L^\infty} \neq 0$,

(ii) $(-\dot{p}_k(t), 0) - \lambda_k(\eta_k^{(1)}, \eta_k^{(2)}) \in \text{co}\ \partial_{x,u}\mathcal{H}(t, x_k(t), p_k(t), r_k(t), u_k(t))$,

(iii) $r_k^{(j)}(t) \cdot [g_j(t, x_k(t), u_k(t)) - \nu_k(t)] = 0$ e $r_k^{(j)}(t) \leq 0$ para $j \in \{1, \ldots, m_g\}$,

(iv) $(p_k(S), -p_k(T)) - \lambda_k(\tau_k^{(1)}, \tau_k^{(2)}) \in \lambda_k \partial\ell(x_k(S), x_k(T)) + \mathcal{N}_C(x_k(S), x_k(T))$,

em que $\partial\Phi$ e $\mathcal{N}_C(x_k(S), x_k(T))$ são a subdiferencial limite de Φ ($\Phi = \mathcal{H}$ e $\Phi = \ell$) e o cone normal limite a C em $(x_k(S), x_k(T))$ [5, Definições 4.3.1 e 4.2.3], respectivamente. Além disso, $\mathcal{H}(t, x_k(t), p_k(t), r_k(t), u_k(t)) = p_k(t) \cdot f(t, x_k(t), u_k(t)) + r_k(t) \cdot g(t, x_k(t), u_k(t))$.

Definição 2 (Processos AWMP)**.** Seja $(\bar{x},\bar{u})$ um processo admissível do Problema (P). Chamamos $(\bar{x},\bar{u})$ de um *processo WMP assintótico* (*processo AWMP*) se existir uma sequência AWMP $\{(x_k, u_k, p_k, r_k, \lambda_k)\}$ tal que $x_k \to \bar{x}$ e $u_k \to \bar{u}$, ambas uniformemente.

Tome $\delta > 0$ e um processo de referência $(\bar{x},\bar{u})$. Com base em [3] vamos considerar que:

(H) ℓ é localmente Lipschitz em uma vizinhança de $(\bar{x}(0), \bar{x}(1))$; $|f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))|$ e $|g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))|$ são integráveis em $[0,1]$; para cada $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, a função $t \to (f(t,x,u), g(t,x,u))$ é Lebesgue mensurável; e existe uma função $L \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ tal que para $\phi = f$ e $\phi = g$, $|\phi(t,x,u) - \phi(t,y,w)| \leq L(t)|(x,u) - (y,w)|$ para todo $(x,u),(y,w) \in \Omega_\delta(t)$ e q.t.p. $t \in [0,1]$.

[1] rodrigo.barbosa@unesp.br
[2] valeriano.oliveira@unesp.br

(CC) Defina $g^+(t,x,u) := \max\{0, g_1(t,x,u), \ldots, g_{m_g}(t,x,u)\}$. Os conjuntos $\{(f(t,x,u), g^+(t,x,u) + s) : |u - \bar{u}(t)| \leq \delta, s \geq 0\}$ são convexos para todo $|x - \bar{x}(t)| \leq \delta$ e q.t.p. $t \in [0,1]$.

Teorema 1 (Princípio do Máximo Fraco Assintótico)**.** *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um mínimo local fraco de (P). Se, para algum $\delta > 0$, as Hipóteses (H) e (CC) valem, então $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo AWMP.*

Ideia da demonstração. A prova inspira-se nos Passos 1, 2, 3 e 5 de [3, Proposição 2]. Inicialmente consideramos um problema penalizado (P_k) dado por: minimizar $J_k(x,u) := \ell(x(0), x(1)) + k\int_0^1 g^+(t, x(t), u(t))\,\mathrm{d}t$ sujeito a $(x,u) \in W := \{(x,u) \in W^{1,1}([0,1];\mathbb{R}^n) \times L^\infty([0,1];\mathbb{R}^m) : \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ q.t.p. $t \in [0,1], (x(t), u(t)) \in \Omega_\delta(t)$ q.t.p. $t \in [0,1]$ e $(x(0), x(1)) \in C\}$. Seguidamente definimos uma aplicação $d_W((x,u),(x',u')) := |x(0) - x'(0)| + \int_0^1 |u(t) - u'(t)|\,\mathrm{d}t$ e mostramos que (W, d_w) é um espaço métrico completo, além de J_k ser contínua em W. Supomos provisoriamente que $\liminf_{k\to\infty}(P_k) = \inf(P)$. Tomamos $\varepsilon_k := J_k(\bar{x}, \bar{u}) - \inf(P_k)$, aplicamos o Princípio Variacional de Ekeland (PVE) [5, Teorema 3.3.1] e concluímos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, (x_k, u_k) é solução do Problema $(\tilde{P}_k)$ em W cuja função objetivo é: $J_k(x,u) + \sqrt{\varepsilon_k}\, d_W((x,u),(x_k,u_k))$. Usamos um princípio do máximo fraco [4, Teorema 3.2] em $(\tilde{P}_k)$ no processo (x_k, u_k) e garantimos as existências de $\lambda_k \geq 0$ e $p_k(t) \in W^{1,1}([0,1];\mathbb{R}^n)$ que satisfazem as condições necessárias de otimalidade. Neste momento, talvez o mais trabalhoso da prova, devemos fazer alguns cálculos e perceber que as condições da Definição 1 podem ser obtidas. As convergências da Definição 2 surgem naturalmente do PVE. Por fim, podemos usar a Hipótese (CC) para remover a hipótese provisória. $\square$

É importante salientar que a Hipótese (H4) usada em [3] serve como uma condição de regularidade para o Teorema 1, no sentido de que a partir dela podemos aplicar limite como feito no Passo 4 em [3] e obter um princípio do máximo fraco para (P). Sem ela a sequência de multiplicadores $\{r_k\}$ pode divergir. Contudo, (H4) é bastante restritiva, diferente dos papéis desempenhados pelas condições CCP em [1] ou AKKT-regular em [2] que são as mais fracas possíveis.

A validação do Teorema 1 sem a Hipótese (CC), o estudo de condições de regularidade mais fracas que a Hipótese (H4) apresentada em [3] e a investigação da pergunta "Métodos do Hamiltoniano aumentado geram sequências AWMP, assim como os métodos do Lagrageano aumentado geram sequências AKKT?" são pretensões para trabalhos futuros.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo 2013/07375-0, e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] R. Andreani et al. "A cone-continuity constraint qualification and algorithmic consequences". Em: **SIAM J. Optim.** 26 (2016), pp. 96–110. DOI: 10.1137/15M1008488.

[2] E. Börgens et al. "New constraint qualifications for optimization problems in Banach spaces based on asymptotic KKT Conditions". Em: **SIAM J. Optim.** 4 (2020), pp. 2956–2982. DOI: 10.1137/19M1306804.

[3] M. d. R. De Pinho, P. Loewen e G. N. Silva. "A weak maximum principle for optimal control problems with nonsmooth mixed constraints". Em: **Set-Valued Anal** 17 (2009), pp. 203–221. DOI: 10.1007/s11228-009-0108-1.

[4] M. d. R. De Pinho e R. B. Vinter. "An Euler-Lagrange inclusion for optimal control problems". Em: **IEEE Transactions on Automatic Control** 7 (1995), pp. 1191–1198. DOI: 10.1109/9.400492.

[5] R. Vinter. **Optimal Control**. Boston: Birkhäuser, 1995.