Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Wavelets para iniciantes

Gilcélia Regiane de Souza[1]
UFSJ, Ouro Branco, MG

A teoria Wavelet tem sido um assunto bem estudado nas últimas décadas. Devido a seus atraentes recursos, como representação em várias escalas (a transformação que envolve mudanças no tamanho de um objeto é denominada transformação de escala) e algoritmos rápidos. E tem tido grande sucesso em diversas áreas.

Wavelets são ondas ou funções pequenas, com origem na expressão em francês ondelette, obtidas a partir de uma função mãe $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$, através de dilatações (contrações ou escalamento) e translações (deslocamento) [2]. Onde $L^2(\mathbf{R})$ denota os espaços das funções com quadrado integrável no sentido de Lebesgue. Também pode-se dizer, ondas localizadas, i.e., ondas que crescem e decaem em um período limitado de tempo. E devem satisfazer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\; dt = 0.$$

Isso garante que a função wavelet tenha uma forma do tipo onda - condição de admissibilidade. E a função wavelet deve ter energia unitária, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2\; dt = 1.$$

Uma observação, a definição de wavelet não está restrita a uma única dimensão, sua definição pode ser expandida à dimensões maiores, dependendo da situação, por exemplo, no tratamento de imagem, se usa wavelet bidimensional.

Wavelet mãe escalada, quando deslocada no tempo (translação), origina as wavelets filhas

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

sendo a (escala) e b (translação) números reais e $a \neq 0$ [1].

Um exemplo de função que atende as restrições é a wavelet de Haar.

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} & 0 \leq t < 0,5 \\ -1 & \text{para} & 0,5 \leq t < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} & \end{cases}$$

Essas funções (agora pensando nas wavelet de Haar escaladas - $\psi_{a,b}$) além de atenderem as restrições acima citadas também são ortogonais entre si e existem apenas em um intervalo finito de tempo.

Alfred Haar, foi o primeiro pesquisador a trabalhar com as wavelets em 1909. Mas foi preciso 80 anos para o início expressivo da utilização da teoria wavelet. Somente após o trabalho de Stéphane Mallat [4], em 1989. Mallat deu novo impulso à utilização das wavelets através de seus trabalhos em processamento digital de imagens.

[1]gilcelia@ufsj.edu.br.

Uma aplicação de destaque do uso das wavelets é junto ao Federal Bureau of Investigation (FBI). O FBI padronizou o uso de wavelets na compressão de imagens de impressões digitais. As rações de compressão são da ordem de 20:1, e a diferença entre a imagem original e a descompactada pode ser identificada apenas por um especialista.

Além, desde famoso exemplo, destaca-se alguns campos do conhecimento em que a teoria wavelet vem sendo aplicada com sucesso, tais como: astronomia, acústica, processamento de sinal e imagem, análise numérica, modelagem matemática, neurofisiologia, engenharia nuclear, economia, realização de diagnósticos médicos, etc.

O rápido avanço da Teoria Wavelet se deve, basicamente, à sua origem interdisciplinar, que tem seduzido pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento. E a extensão de sua aplicação para novas pesquisas, facilitadas pela disponibilidade de programas e ferramentas gratuitas e, até, várias dessas sob a forma de recursos de livre distribuição (free softwares).

O sucesso do implemento deve-se a escolha adequada da wavelet. Por isso o foco deste trabalho é o estudo das mais variadas wavelets. As wavelets podem ser analíticas ou numéricas, ortonormais ou não-ortonormais, contínuas ou discretas. Já apresentamos um exemplo de wavelet discreta, as de Haar. E limitações são previsíveis devido a sua simplicidade. Um exemplo, contínuo é o chapéu mexicano

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

E assim por diante. Mas cada wavelet apresentará vantagens dependendo do tipo do problema abordado.

Sendo assim, propomos estudar algumas propriedades das funções-base wavelets, mais frequentemente encontradas nos trabalhos correntes. Em especial, na compressão de dados e análise de sinais (eliminação de ruídos). Ou seja, o intuito deste trabalho é estudar as wavelets, analisá-las e informar qual a melhor em cada situação/aplicação.

Agradecimentos

À UFSJ.

Referências

[1] Chui, C. *An introduction to Wavelets.* Academic Press, 1992, volume 1. DOI:10.2307/2153134.

[2] Cupertino, P. *Wavelets: uma introdução, Revista Matemática Universitária.* Volume 33, páginas 13-44, Dezembro 2002. ISSN: 2675-5254.

[3] Domingues, M. O. *Análise Wavelet na Simulação Numérica de Equações Diferenciais Parciais com Adaptabilidade Espacial.* Tese de Doutorado. Universidade de Campinas, 2001.

[4] Mallat, A. S. *Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation.* IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 11, no. 7, pp. 674-693, July 1989, DOI: 10.1109/34.192463.

[5] Meyer, Y. *Wavelets.* Springer Verlag, Berlin, 1989.