Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Números de Stirling do Primeiro Tipo: Algumas Interpretações Combinatórias

Gabriel de Freitas Pinheiro[1]
IMECC/UNICAMP, Campinas, SP
Eduardo Alves Macena[2] Irene Magalhães Craveiro[3]
FACET/UFGD, Dourados, MS

No contexto de função geradora, os números de Stirling do primeiro tipo são definidos em [1] e [2] como coeficientes de x^k de uma função polinomial de grau n com $0 < k \leq n$. Ou seja, tratam-se de uma sequência numérica gerada por uma classe de polinômios, fixado o respectivo grau n, que é um número inteiro positivo, sendo que os coeficientes das potências de x são elementos dessa sequência. A técnica da função geradora teve origem nos trabalhos de A. De Moivre (1667-1754) e, posteriormente, foi utilizada por L. Euler (1707-1783) em problemas da Teoria Aditiva de Números, principalmente na Teoria de Partições. Essa técnica permite abordarmos problemas de natureza combinatória de forma algébrica além de nos possibilitar obter soluções de determinadas recorrências.

Assim, tendo por base os números de Stirling do primeiro tipo, o intuito deste trabalho é apresentar algumas interpretações combinatórias para esses números. A principal delas relaciona os números de Stirling do primeiro tipo com a soma de produtos de k fatores distintos sendo que esses fatores pertencem ao conjunto $\{1, 2, \cdots, n-1\}$. Além disso, interpretamos duas classes destes números que estão diretamente ligadas com o coeficiente binomial. Vale observar que os resultados apresentados podem ser encontrados em [1]

Em [1] os números de Stirling do primeiro tipo são definidos como a família de polinômios $p_n(x)$, $n \geq 1$, com a forma

$$p_n(x) = x(x+1)(x+2)...(x+(n-1)). \tag{1}$$

e $p_0(x) = 1$ e, constatamos por meio da definição que o grau de $p_n(x)$, para $n > 1$ é igual a n e o coeficiente de x^n é igual a 1.

Expandimos a expressão $x(x+1)...(x+(n-1))$ e obtemos o polinômio

$$p_n(x) = x^n + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} x^{n-1} + ... + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x, \tag{2}$$

onde $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ é o coeficiente de x^k e é chamado *número de Stirling do primeiro tipo* e lemos como n colchete k. De acordo com a definição, seguem as sequintes propriedades imediatas: $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ e $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$, para $n \geq 1$ e $n < k$. Por meio de $p_0(x) = 1$, definimos $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$.

A seguir apresentaremos um resultado que nos será bastante útil, visto que estabelece a relação entre certas classes dos números de Stirling do primeiro com o coeficiente binomial.

[1]freitasgabriel688@gmail.com
[2]eduardo.macena039@academico.ufgd.edu.br
[3]irenecraveiro@ufgd.edu.br

Proposição 0.1. *Para todo n natural, $n \geq 2$ temos que:*

i. $\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(3n-1)\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}$;

ii. $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$.

Enunciaremos agora o resultado principal deste trabalho, que nos diz que os números de Stirling do primeiro tipo correspondem à soma de produtos de k fatores distintos, onde esses fatores pertencem ao conjunto $\{1, 2, \cdots n-1\}$

Teorema 0.1. *Sejam n e k naturais tais que $n \geq k \geq 1$. Então,*

$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = \sum_{\substack{0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \\ i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n-1\}}} i_1 \cdot i_2 \cdot \ldots \cdot i_k.$$

A identidade dada Teorema 0.1 permite a seguinte interpretação combinatória para os números de Stirling do primeiro tipo.

Corolário 0.1. *Sejam n e k naturais tais que $n \geq k > 1$. Então,* $\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$ *é igual a soma de todos os produtos com os fatores distintos, cujos fatores são elementos de {1,2,...,n-1}.*

Vejamos um caso particular do Corolário 0.1. Temos que $\begin{bmatrix} 5 \\ 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 50$. Por outro lado, $\begin{bmatrix} 5 \\ 5-3 \end{bmatrix}$ = soma de todos os produtos formados de 3 fatores distintos, cujos fatores são elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$. Ou seja, $\begin{bmatrix} 5 \\ 5-3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 + 8 + 12 + 24 = 50$

Segue do Teorema 0.1 e do item i. da Proposição 0.1 uma interpretação combinatória que relaciona a soma de produtos de dois inteiros positivos distintos $i, j \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ com o coeficiente binomial.

Corolário 0.2. *Para todo $n \geq 2$ temos que:*

$$\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}(3n-1)\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1} ij.$$

O próximo resultado segue como consequência do Teorema 0.1 e do item ii. da Proposição 0.1.

Corolário 0.3. *Para todo $n \geq 3$,*

$$\begin{bmatrix} n \\ n-3 \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1} ijk = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Referências

[1] J. Kovalina. “A Unified Interpretation of the Binomial Coefficients, the Stirling Numbers, and the Gaussian Coefficients”. Em: **The American Mathematical Monthly** 10 (2000), pp. 901–910. DOI: `https://doi.org/10.2307/2695583`.

[2] T. Mansour e M. Schork. **Commutation Relations, Normal Ordering, and Stirling Numbers**. 1a. ed. New York: Chapman e Hall/CRC, 2015. ISBN: 9780429101229.