

# Escoamentos de fluidos magnéticos em uma cavidade

Camila de Oliveira Vieira<sup>1</sup>

Centro Multidisciplinar de Luís Eduardo Magalhães, UFOB, Luís Eduardo Magalhães, BA

Yuri Dumaesq Sobral<sup>2</sup>

Departamento de Matemática, UnB, Brasília, DF

Francisco Ricardo da Cunha<sup>3</sup>

Departamento de Engenharia Mecânica, UnB, Brasília, DF

**Resumo.** Neste trabalho, estudamos escoamentos de fluidos magnéticos em uma cavidade com parede superior móvel. Propomos uma formulação vorticidade-função de corrente para resolver o escoamento e a equação de evolução da magnetização. As equações que regem o escoamento foram discretizadas utilizando o método de diferenças finitas. Identificamos os principais parâmetros físicos adimensionais do problema como o número de Reynolds, coeficiente de pressão magnética, tempo de relaxação magnética, magnetização de saturação e a intensidade adimensional do campo aplicado. O campo magnético é gerado por um fio condutor pelo qual passa uma corrente elétrica permanente. Nesta geometria bem conhecida, estudamos os efeitos do campo magnético no escoamento.

**Palavras-chave.** cavidade com parede móvel, fluido magnético, magnetização, diferenças finitas, formulação vorticidade-função de corrente, equações de Shliomis.

## 1 Introdução

O estudo da dinâmica de fluidos magnéticos é uma área inovadora da Dinâmica dos Fluidos, que vem recebendo bastante atenção nas pesquisas recentes. Este tipo de material foi desenvolvido por um pesquisador da NASA, em 1965 [4], com o intuito de criar combustíveis que fossem remotamente controlados na ausência da gravidade. São materiais compostos por nanopartículas magnéticas diluídas em uma suspensão líquida não magnética que, na presença de um campo magnético externo, se alinham ao campo e dão ao fluido uma magnetização não-nula. Porém, estas partículas interagem umas com as outras formando grandes aglomerados que podem desestabilizar o fluido magnético, fazendo com que ele deixe de se comportar como tal. Para evitar este problema, existem maneiras de estabilizar o ferrofluido, tais como revestimento das partículas com cargas elétricas ou com camadas lipídicas. Segundo [7] as partículas típicas têm um diâmetro de 3 – 15 nm, sendo aproximadamente 10 nm para o dipolo interno e cerca de 2 nm de camada de surfactantes.

Fluidos magnéticos têm diversas aplicações. Em [2], uma aplicação de fluidos magnéticos na tecnologia de limpeza de derramamentos de óleo em ambientes naturais foi estudada. Posteriormente, estudos reológicos foram analisados por [1, 5, 6] em suspensões magnéticas sobre os efeitos de um campo magnético.

Um dos problemas clássicos mais explorados em CFD é o escoamento em uma cavidade com a parede superior móvel. Um estudo minucioso de revisão sobre o problema da cavidade para fluidos newtonianos foi feito por Shankar e Deshpande, em [8], em que eles abordam vários trabalhos com distintas configurações de cavidade.

---

<sup>1</sup>camila.vieira@ufob.edu.br

<sup>2</sup>ydsobral@unb.br

<sup>3</sup>fr Cunha@unb.br

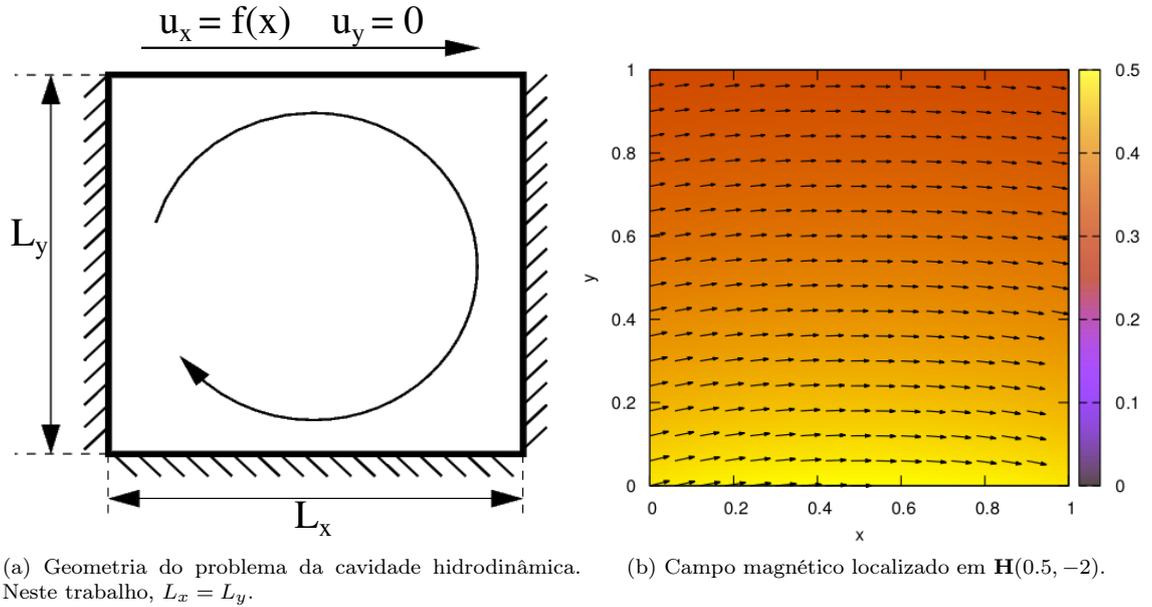


Figura 1: O problema da cavidade.

Em [12] foram investigados escoamentos de fluidos biomagnéticos (BFD), como por exemplo, o sangue, em cavidades retangulares. Utilizou-se a formulação vorticidade-função de corrente, com a hipótese da magnetização  $M$  ser escrita linearmente em função do campo magnético aplicado  $H$  e da temperatura  $T$ , no qual foram obtidos, principalmente, resultados relacionados a problemas não-isotérmicos. Recentemente, um estudo apresentado em [10] simulou escoamentos de fluidos magnéticos em uma cavidade, considerando a equação completa da magnetização de Shliomis, no qual foram obtidas estruturas diferentes no escoamento. As condições de contorno utilizadas pelos autores, porém, não parecem reproduzir uma situação física real.

Motivados por [11], o objetivo principal deste trabalho foi simular escoamentos de fluidos magnéticos em uma cavidade quadrada bidimensional utilizando uma formulação vorticidade-função de corrente, incorporando a equação de evolução da magnetização de Shliomis [9].

Na próxima seção apresentaremos a formulação do problema da cavidade, com condições de contorno e inicial adequadas. Mostraremos as equações que regem este problema, bem como as variáveis e parâmetros adimensionais.

## 2 Formulação do Problema

Neste trabalho, vamos resolver o problema da cavidade laminar, em que a parede superior é móvel de acordo com a Figura 1(a), para um fluido magnético. O escoamento é bidimensional e incompressível e o campo magnético aplicado gerado por um fio condutor por onde passa uma corrente elétrica, localizado na parede inferior da cavidade, conforme a Figura 1(b).

### 2.1 Equações Governantes

As equações governantes que regem este problema são a equação da continuidade e de Navier-Stokes, respectivamente, ver em [7, 13],

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

e

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}, \quad (2)$$

em que o termo  $\mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$ , chamado de força de Kelvin, é responsável por trazer os efeitos magnéticos para o modelo. Neste termo,  $\mathbf{M}$  representa a magnetização do fluido e  $\mathbf{H}$  o campo magnético.

Para o estudo de fluidos magnéticos em regimes fora do equilíbrio, é necessário definir uma equação de evolução para a magnetização. Para tal, Shliomis em [9] propôs o primeiro modelo constitutivo da equação da magnetização, no qual baseou-se em utilizar uma forma simples para a relaxação da magnetização. A equação é dada por,

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} (\mathbf{M} - \mathbf{M}_0) - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} + \frac{1}{2} \xi \times \mathbf{M} + \frac{\mu_0}{6\mu\phi} (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}, \quad (3)$$

em que  $\tau$  é o tempo de relaxação magnética,  $\phi$  é a fração volumétrica,  $\mu_0$  é permeabilidade magnética no vácuo e  $\mu$  é a viscosidade de cisalhamento.

Reescrevendo as equações (1) e (2) utilizando a formulação vorticidade-linha de corrente, resultamos em um sistema com uma equação de Poisson para a função de corrente ( $\psi$ ),  $\mathbf{u} = \nabla \times \psi \hat{\mathbf{e}}_3$ , e uma equação da advecção para a vorticidade ( $\xi$ ), respectivamente, em termos adimensionais:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\xi. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_x \frac{\partial \xi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + C_{pm} \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial M_x}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Adimensionalizando a equação de evolução da magnetização de Shliomis [9], dada em (3) e considerando apenas o termo da advecção, maiores detalhes em [13], temos que

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial M_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial M_x}{\partial y} = -\frac{1}{\tau} (M_x - M_{0x}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial M_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial M_y}{\partial y} = -\frac{1}{\tau} (M_y - M_{0y}), \quad (7)$$

onde

$$M_{0x} = M_s \mathcal{L}(\alpha) \frac{H_x}{|H|} \quad \text{e} \quad M_{0y} = M_s \mathcal{L}(\alpha) \frac{H_y}{|H|}, \quad (8)$$

é a magnetização para um fluido em equilíbrio, em que  $M_s$  representa a magnetização de saturação e  $\mathcal{L}(\alpha)$  a função Langevin, dada por,

$$\mathcal{L}(\alpha) = \coth \alpha - \frac{1}{\alpha}, \quad \text{em que} \quad \alpha = \frac{\mu_0 m H}{kT}$$

é a intensidade adimensional do campo magnético,  $m$  é o momento de dipolo magnético das partículas magnéticas,  $k$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura.

Os parâmetros adimensionais do problema são dados por:

$$Re = \frac{L_x \rho U}{\mu} \quad C_{pm} = \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho U^2} \quad \tau = \frac{\bar{\tau} U}{L_x} \quad \zeta = \frac{M_s}{H_0} \quad \alpha = \frac{\mu_0 m H}{k T}. \quad (9)$$

O parâmetro  $Re$  é o número de Reynolds, representa a razão entre forças inerciais e forças viscosas,  $C_{pm}$  é o coeficiente de pressão magnética, representa a razão entre pressão magnética e pressão hidrodinâmica,  $\tau$  é o tempo de relaxação magnética, é o tempo adimensional dado pela razão entre o tempo característico do escoamento e o tempo de relaxação magnética também chamado de número de Péclet.  $\zeta$  é a magnetização de saturação do ferrofluido, é o parâmetro adimensional da magnetização de saturação do ferrofluido em relação a uma escala de campo magnético, e  $\alpha$  é a intensidade adimensional do campo aplicado, é o parâmetro adimensional do campo aplicado.

Neste trabalho, vamos supor que  $|\mathbf{M}| \ll |\mathbf{H}|$ , de forma que o fluido é fracamente magnetizável. Portanto,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{M} + \mathbf{H}) \approx \nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Desta forma, não resolveremos localmente o campo magnético, e será satisfeita fracamente a hipótese do limite magnetostático das equações de Maxwell, [13]. O limite do fluido fracamente magnetizável é representado em termos adimensionais, definindo a magnetização de saturação adimensional  $\zeta \ll 1$ . Esta aproximação será tanto melhor quanto menor for  $\zeta$  e mais refinada for a malha.

O campo aplicado adimensional, é dado por, [12]

$$H_x = \frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \quad H_y = -\frac{x - a}{(x - a)^2 + (y - b)^2}, \quad \mathbf{H} = \frac{|b|}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}}, \quad (10)$$

em que  $(a, b)$  é a localização do fio condutor.

## 2.2 Simulação Numérica

Não utilizamos neste trabalho, a formulação do problema clássico da cavidade, pelo fato desta apresentar duas singularidades nas tensões viscosas, nas quinas da parede superior. Para regularizar este problema, utilizamos a estratégia de [3], que é impor na placa móvel superior uma velocidade  $u_x(x, 1) = \sin^2(\pi x)$ .

Utilizamos diferenças finitas de ordem 2 para discretizar as derivadas espaciais e para as derivadas temporais, utilizamos o método de Euler. Para a vorticidade nas paredes usamos o método da extrapolação. Desta forma, obtemos um erro  $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$  no sistema. Para resolver o Problema de Poisson utilizamos o método iterativo de SOR.

A Figura 2, apresenta uma verificação dos perfis velocidades de  $u_x$  e de  $u_y$ , segundo [3]. Notamos uma boa convergência (de segunda ordem) dos resultados.

## 3 Escoamento de fluidos magnéticos

No que segue, apresentamos o escoamento de fluidos magnéticos em uma cavidade para diferentes parâmetros com a parede superior móvel. Identificamos diversas configurações que o escoamento pode assumir quando submetido a um campo magnético com diferentes intensidades. Queremos investigar como o campo magnético afeta o escoamento.

A Figura 3 mostra as linhas de corrente para alguns valores de  $C_{pm}$  específicos. Notamos que no caso puramente hidrodinâmico, isto é,  $C_{pm} = 0$ , o escoamento apresenta três vórtices: o principal, o secundário, localizado próximo a parede direita, e um terceiro pequeno localizado próximo à parte

inferior da parede esquerda. Quando aplicamos o campo magnético com  $C_{pm} = 10^3$ , vemos que o fluido que estava confinado na região do terceiro vórtice é quase todo integrado ao escoamento principal. O segundo vórtice cresce no escoamento, porém o vórtice central ainda é o dominante, deslocando-se um pouco para perto da parede direita. Quando aumentamos o valor de  $C_{pm} = 10^4$ , o segundo vórtice aumenta de tamanho tornando-se muito influente no escoamento, fazendo com que o vórtice central seja movido para próximo das paredes superior e direita.

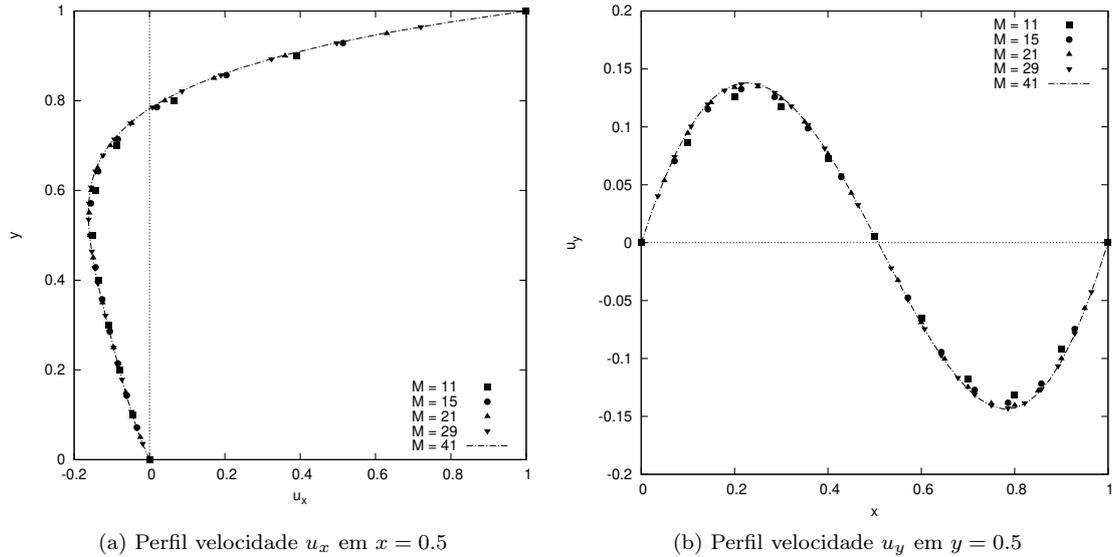


Figura 2: Perfis velocidade para  $Re = 10$  e  $N = 11, 15, 21, 29, 41$ .

A Figura 4 apresenta os perfis de velocidades  $u_x$  e  $u_y$ , ambos para diferentes valores de  $C_{pm}$ . Na Figura 4(a), para  $C_{pm} = 0$ , há uma inversão do sinal da velocidade em  $y \approx 0.57$ , ou seja, próximo a região central do escoamento e notamos maiores velocidades nas proximidades da parede superior. Podemos observar que, para  $C_{pm} = 5 \times 10^3$  e  $3 \times 10^4$ , os pontos de inversão de velocidade são alterados para  $y \approx 0.8$  e  $y \approx 0.9$ , respectivamente, ou seja, a região de velocidades mais altas são movidas para mais perto da parede superior, gerando altos gradientes de velocidades nesta região. Próximo à parede inferior, o perfil assume um formato afunilado, com baixas velocidades e baixos gradientes de velocidade, indicando que o fluido magnético está sendo atraído pela fonte magnética e não escoava livremente como quando  $C_{pm} = 0$ . De modo análogo, a Figura 4(b), mostra o perfil velocidade de  $u_y$ . Quando  $C_{pm} = 0$ , temos velocidades positivas para  $0 < x < 0.56$ ; em  $x \approx 0.56$  há uma inversão no sentido da velocidade.

## 4 Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos escoamentos de fluidos magnéticos usando um escoamento em uma geometria simples e bem conhecida. Resolvemos o escoamento usando a formulação vorticidade-função de corrente na presença das forças magnéticas. O objetivo é entender como a interação da magnetização do escoamento altera a resposta do fluido neste problema. Vimos que o escoamento pode assumir estruturas bem diferentes, especialmente para valores de  $C_{pm}$  altos. As forças magnéticas causam uma alteração importante na topologia do escoamento.

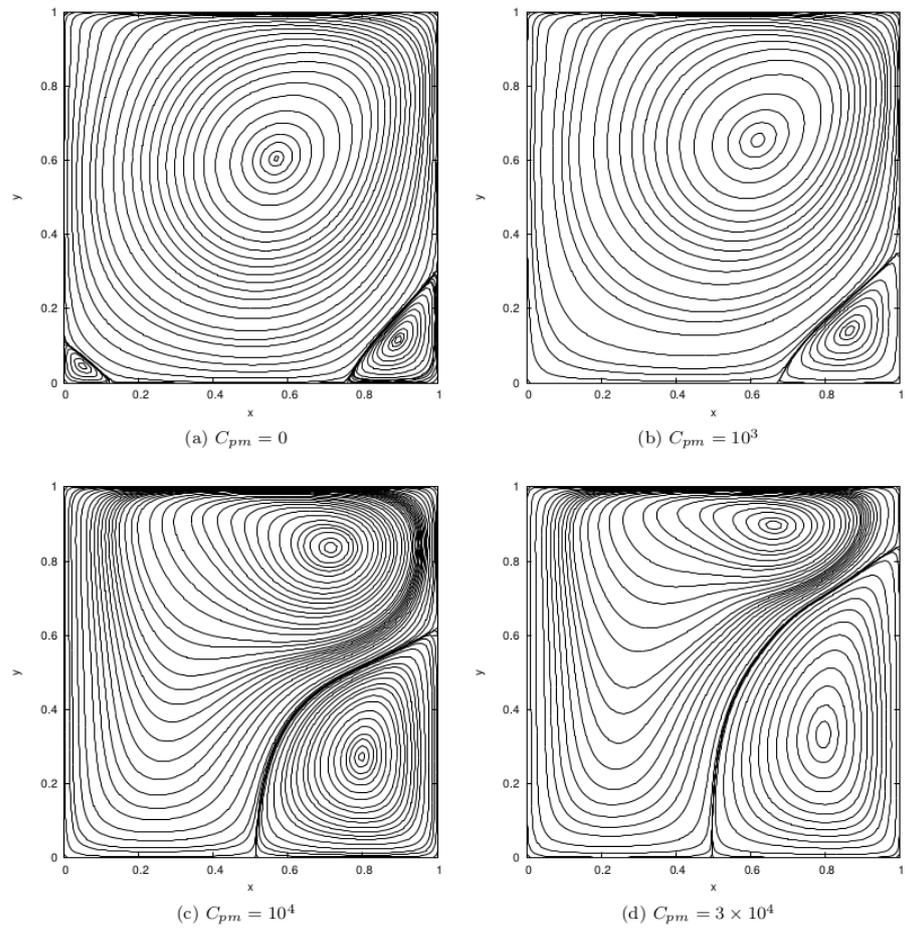


Figura 3: Linhas de corrente para  $Re = 500$  e diversos valores de  $C_{pm}$ .

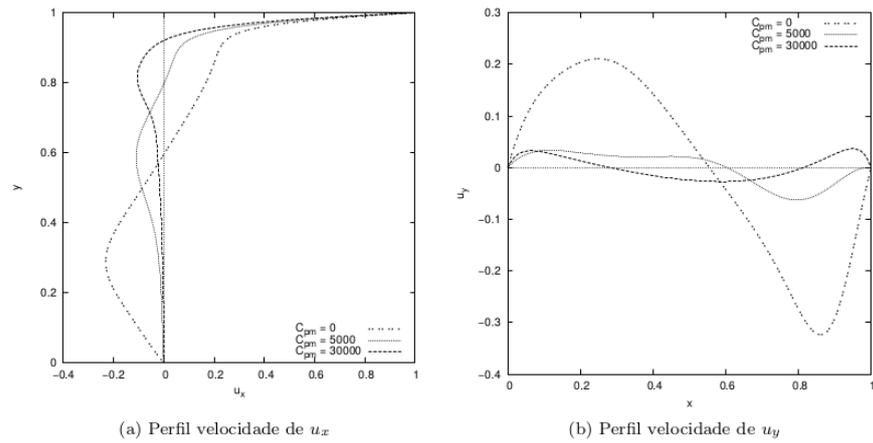


Figura 4: Perfil velocidade para  $Re = 500$  e vários valores de  $C_{pm}$ .

Neste primeiro estudo, apresentamos os resultados para um fluido magnético cuja magnetização interage com o escoamento apenas pelo termo de advecção, [13]. Nos próximos trabalhos, queremos incluir os termos de vorticidade e precessão na equação de Shliomis [9] para investigar as alterações no escoamento causadas por estes termos.

## Referências

- [1] F. R. Cunha, A. P. Rosa e N. J. Dias. “Rheology of a very dilute magnetic suspension with micro-structures of nanoparticles”. Em: **Journal of Magnetism and Magnetic Materials** 397 (2016), pp. 266–274.
- [2] F. R. Cunha e Y. D. Sobral. “Characterization of the physical parameters in a process of magnetic separation and pressure-driven flow of a magnetic fluid”. Em: **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications** 343 (2004), pp. 36–64.
- [3] E. J. Hinch. **Think Before You Compute: A Prelude to Computational Fluid Dynamics**. Cambridge Texts in Applied Mathematics, 2020.
- [4] S.S. Papell. “Low viscosity magnetic fluid obtained by the colloidal suspension of magnetic particles”. Em: **U.S. Patent** (1965), pp. 215–572.
- [5] A. P. Rosa e F. R. Cunha. “Calculation of the Flow of a Magnetic Fluid in Capillaries Tubes with varying Magnetization by Vorticity”. Em: **Proceedings of International Congress of Mechanical Engineering** 1 (2013), pp. 1–11.
- [6] A. P. Rosa, R. G. Gontijo e F. R. Cunha. “Laminar pipe flow with drag reduction induced by a magnetic field gradient”. Em: **Applied Mathematical Modelling** 40 (2016), pp. 3907–3918.
- [7] R. E. Rosensweig. **Ferrohydrodynamics**. Courier Corporation. 2013.
- [8] P.N. Shankar e M.D. Deshpande. “Fluid mechanics in the driven cavity”. Em: **Annual Review of Fluid Mechanics** 32 (2000), pp. 93–136.
- [9] M. I. Shliomis. “Effective viscosity of magnetic suspensions”. Em: **Zh. Eksp. Teor. Fiz** 61 (1971), s1971d.
- [10] C. Singh, A. K. Das e P. K. Das. “Flow restrictive and shear reducing effect of magnetization relaxation in ferrofluid cavity flow”. Em: **Physics of Fluids** 28 (2016), p. 087103.
- [11] E. E. Tzirtzilakis. “A simple numerical methodology for BFD problems using stream function vorticity formulation”. Em: **Communications in Numerical Methods in Engineering** 24 (2008), pp. 683–700.
- [12] E. E. Tzirtzilakis e M. A. Xenos. “Biomagnetic fluid flow in a driven cavity”. Em: **Meccanica** 48 (2013), pp. 187–200.
- [13] C. O. Vieira. “Simulação Computacional de Escoamentos de Fluidos Magnéticos em Cavidades”. Tese de doutorado. DMAT/UnB, 2018.