Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Uma sequência didática para o ensino da tabuada baseada na metodologia de resolução de problemas

João de Deus Mendes da Silva[1] Valeska Martins de Souza[2]
UFMA, São Luis, MA

Resumo. Nesse trabalho propomos uma sequência didática para o ensino da tabuada de multiplicação, usando como metodologia de ensino a resolução de problemas em consonância com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Abordando de forma consistente conteúdos matemáticos tais como paridade, divisores, múltiplos, propriedades das operações do conjunto dos números naturais, números primos, números compostos e reconhecimento de padrões.

Palavras-chave. Tabuada. Ensino de matemática. Multiplicação. Novas metodologias. Sequência Didática.

1 Introdução

Ao visitarmos uma escola da Educação Básica, turma do sexto ano, pudemos constatar as dificuldades dos alunos com a tabuada. Relembramos a época em que também tinhamos dificuldades com a tabuada e a metodologia utilizada no processo de ensino aprendizagem, certamente muito diferente da que é usada hoje, pensamos. Surpresa nossa, quando uma aluna trouxe a tabuada que usava para "decorar", pois constatamos que foi a mesma que usamos décadas passadas,(Figura 1). Pelo visto, assim como nós, os problemas com a tabuada apenas envelheceram.

Refletindo sobre a formação dos futuros professores de matemática nos nossos cursos de licenciatura, e sobre as questões envolvidas na aprendizagem da matemática, relembramos um dos expoentes da escola construtivista, Jean Piaget, muito pertinente nesse contexto de educação para crianças,

> *"O professor não ensina, mas arranja modos de a própria criança descobrir. Cria situações-problema."*

Vamos abordar nesse artigo uma sequência didática para ensino da tabuada de multiplicação, na qual apresentamos a visão algébrica, abstrata, mas também propomos uma "oficina" baseada numa metodologia construtivista, orientada a partir de propriedades matemáticas como a paridade, reconhecimento de padrões, estudo de números primos, compostos, divisores, quadrados perfeitos etc. Organizamos o artigo em três partes: a primeira relembramos a parte algébrica, abstrata, da tabuada composta pelas Seções 2 e 3, a segunda parte, Seção 4, apresentamos uma sequência didática para ensinar tabuada, que pode ser usada a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental. E por fim, as Considerações Finais.

[1] jdm.silva@ufma.br
[2] valeska.martins@ufma.br

Figura 1: Tabuada usada por várias gerações

2 A Álgebra da tabuada

Nesta seção, vamos abordar as definições algébricas vistas pelos alunos em um curso de licenciatura em matemática, na maioria das universidades do Brasil. A definição formal do conjunto dos números naturais, a definição de uma operação e em particular a da soma e da multiplicação de números naturais.

2.1 Números Naturais

Até chegarmos ao conjunto dos números naturais, como é amplamente conhecido hoje, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \}$, cuja noção é intuitiva, foram necessários milhares de anos e a contribuição de muitos matemáticos. Sua formalização, pelo Italiano Giuseppe Peano [3], no final do século XIX, não é nada trivial.

Definição 2.1. *Seja $\mathbb{N}$ um conjunto sobre o qual está definida uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo os seguintes axiomas:*
P_1*: $0 \in \mathbb{N}$;*
P_2*: se $n \in \mathbb{N}$, então $s(n) \in \mathbb{N}$;*
P_3*: não existe $n \in \mathbb{N}$ com $s(n) = 0$;*
P_4*: se $s(m) = s(n)$, então $m = n$;*
P_5*: se $X \subset \mathbb{N}, 0 \in X$ e se $s(n) \in X$ sempre que $n \in X$ então $X = \mathbb{N}$.*

Estes cinco axiomas de Peano, como são conhecidos, definem o conjunto dos números naturais. O axioma P_1 nos diz que $\mathbb{N}$ é um conjunto não vazio que contém o número zero, já P_2 define uma função s, sem uma lei explícita de operação, P_4 garante que s é injetiva. Já P_3 nos diz que não vale a sobrejetividade, visto que o número zero não está associado a nenhum elemento de $\mathbb{N}$. Esses quatro axiomas garantem que um conjunto X,

$$X = \{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots\} \subset \mathbb{N}$$

Fazendo $1 = s(0), 2 = s(s(0)), 3 = s(s(s(0))), \ldots$, tem-se $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. O axioma P_5, conhecido como princípio de indução, nos assegura que $X = \mathbb{N}$. Essa definição ainda nos leva a concluir que, do ponto do vista da Álgebra, o conjunto $\mathbb{N}$ é único (a menos de isomorfismos).

Observação 2.1. *Importante frisar que essa definição é equivalente a definição dada por Lages [4], onde são apresentados apenas 3 axiomas. A demonstração pode ser vista em [3].*

2.2 Operações com números naturais

Definição 2.2. *Dado um conjunto $G \neq \emptyset$, uma operação sobre G é uma função $*$, $* : G \times G \to G$ tal que $*(a, b) = a * b$, $\forall a, b \in G$.*

Antes da definição das operações sobre $\mathbb{N}$ é necessário definir *enésima* iterada para facilitar a notação e compreensão,

Definição 2.3. *A enésima iterada da função* $s : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ *é definida por* $s^1 = s$ *e* $s^{s(n)} = s \circ s^n$.

2.2.1 Adição no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Definição 2.4. *Seja* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *e* $m, n \in \mathbb{N}$, *a soma* $m + n$ *é dada por,*

$$\begin{cases} m + 0 = m \\ m + n = s^n(m) \end{cases} \tag{1}$$

Ou seja, somar o número natural m com o número natural n significa iterar o número natural m, n vezes, por exemplo, $m + 1 = s^1(m) = s(m)$. O que nos diz que podemos compreender o sucessor de $m, s(m)$, como $m + 1$. Além disso,

$$m + s(n) = s^{(n)}(m) = s(s^n(m)) = s(m + n).$$

Resumindo temos que,

$$\begin{cases} m + 1 = s(m) \\ m + s(n) = s(m + n) \end{cases} \tag{2}$$

De (2), temos as regras para somar quaisquer dois números naturais. Observe também que, $1 = s(0)$, isto é, o 1 é sucessor do 0. Também que $m + (n + 1) = (m + n) + 1$, resultado que ajuda a demonstrar que a soma é uma operação associativa, isto é $p + (m + n) = (p + m) + n$ (a demonstração pode ser consultada em [3]). Além disso,

Teorema 2.1. $1 + 1 = 2$.

Demonstração. De fato, como $1 = s(0)$ e $2 = s(1)$, então $1+1 = 1+s(0) = s(1+0) = s(1) = 2$. $\square$

Como vimos, no mundo da Álgebra, $1 + 1 = 2$, não se trata como obviedade!

2.2.2 Multiplicação no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$

Definição 2.5. *Dados dois números* $m, n \in \mathbb{N}$, *o produto* $m \cdot n$ *é definido por,*

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0 \\ m \cdot s(n) = m \cdot s(n) + m \end{cases} \tag{3}$$

Observação 2.2. *O conjunto* $\mathbb{N}$ *munido da operação de adição e de multiplicação satisfaz:*
$m + n = n + m, \forall m, n \in \mathbb{N}$. *A adição é comutativa;*
$m \cdot 1 = m \cdot s(0) = m \cdot 0 + m = m$, $\forall m \in \mathbb{N}$; *(elemento neutro)*
$m \cdot n = n \cdot m$. *A multiplicação é comutativa;*
$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$, $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$. *Propriedade distributiva;*

3 A tábua da tabuada

Do ponto de vista da Álgebra, dado o conjunto $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $(G, *)$ com uma operação $*$, se indicarmos $a_i * a_j = a_{ij}$, a tábua dessa operação é uma tabela de dupla entrada onde cada a_{ij} está localizado na linha i, coluna j. No caso da tabuada de multiplicação, o conjunto $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, e a tábua de $(G, \cdot)$ pode ser observada na Tabela 1.

Tabela 1: Tábua da tabuada de um a dez.

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	56	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

3.1 Propriedades

A partir da Tabela 1, podemos observar diversos padrões que certamente ajudam na aprendizagem do aluno. Por exemplo, observe que os elementos que figuram na diagonal principal são quadrados perfeitos, e aparecem uma única vez $(1, 25, 49, 64, 81, 100)$ ou aparecem três vezes $(4, 9, 16, 36)$ na Tabela 1. Os números fora da diagonal principal aparecem duas ou quatro vezes. Observe que um número para figurar na Tabela 1, é necessário possuir divisores menores do que 10, obviamente essa condição não é suficiente, pois, por exemplo, o 33 tem divisor menor do que 10 (3 divide 33). Ou seja, a presença de um determinado número na Tabela 1 está associada aos seus divisores menores do que 10. Lembremos que,

Proposição 3.1. *Se um número $d \in \mathbb{N}$ é divisor de $a \in \mathbb{N}$ então $\frac{a}{d}$ também é.*

Demonstração. De fato, se $d|a$ então existe um $b \in \mathbb{N}$ tal que

$$a = b \cdot d \Longleftrightarrow b = \frac{a}{d} \in \mathbb{N}.$$

□

Exemplo 3.1. *Observe que 9 é divisor do número 36, e $4 = \frac{36}{9}$ também é divisor de 36. Então podemos dizer que os divisores de um número aparecem em pares? De modo geral sim, entretanto existem casos em que isso não ocorre, quando o número é um quadrado perfeito.*

Proposição 3.2. *Um número $q \in \mathbb{N}$ é um quadrado perfeito ($q = a^2$ para algum $a \in \mathbb{N}$) se, e somente se, ele tem um número ímpar de divisores.*

Demonstração. De fato, se $q \in \mathbb{N}$ é um quadrado perfeito então existe um $a \in \mathbb{N}$ tal que $q = a^2 \Longleftrightarrow a = \frac{q}{a} \in \mathbb{N}$, ou seja, a é um divisor que não aparece em pares, como todos os outros aparecem em pares então q tem um número ímpar de divisores. Por outro lado, se q possui um número ímpar de divisores então existe um $a \in \mathbb{N}$ tal que $a = \frac{q}{a} \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow q = a^2$. Ou seja, q é um quadrado perfeito. □

Proposição 3.3. *Dados dois números $a, b \in \mathbb{N}$, o produto $a \cdot b$ é ímpar se, e somente se, ambos forem ímpares.*

Demonstração. Inicialmente relembre que um número $x \in \mathbb{N}$ é ímpar se, quando dividido por 2 deixa resto 1, ou seja, se $x = 2 \cdot k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Caso contrário, se o resto da divisão por 2 deixa resto 0, $x = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, dizemos que x é par. Sejam a e b dois números ímpares, então existem $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $a = 2 \cdot m + 1$ e $b = 2 \cdot n + 1$. Daí, $a \cdot b = (2 \cdot m + 1) \cdot (2 \cdot n + 1) = 4 \cdot m \cdot n + 2 \cdot n + 2 \cdot m + 1 = 2(2 \cdot m \cdot n + m + n) + 1$, fazendo $k = 2 \cdot m \cdot n + m + n$, temos $a \cdot b = 2 \cdot k + 1$ o que mostra que $a \cdot b$ é um número ímpar. Por outro lado, se um deles for par, digamos $a = 2 \cdot m$ e $b = 2 \cdot n + 1$, ímpar, tem-se $a \cdot b = 2 \cdot m \cdot (2 \cdot n + 1) = 4 \cdot m \cdot n + 2 \cdot m = 2 \cdot (2 \cdot m \cdot n + m) = 2 \cdot k$ para $k = (2 \cdot m \cdot n + m)$, isto é, $a \cdot b$ é um número par e como a multiplicação é comutativa, o produto de um número ímpar por um número par é também um número par. Se $a, b \in \mathbb{N}$ fossem ambos pares, então $a = 2 \cdot m$ e $b = 2 \cdot n$, $m, n \in \mathbb{N}$ e daí, $a \cdot b = 2 \cdot m \cdot 2 \cdot n = 4 \cdot m \cdot n = 2 \cdot k$, tomando $k = 2 \cdot m \cdot n$ o que mostra que $a \cdot b$ é par. O que encerra a demonstração. $\square$

4 A proposta de ensino da tabuada

A tabuada, como conhecemos hoje, é originária da Escola Pitagórica, já o termo tabuada tem origem nas tábuas de cálculos que serviam como gabaritos para agilizar a contagem de transações comerciais [5]. O ensino da tabuada no Brasil, sofreu influência de diferentes correntes educacionais, o que legitima sua importância histórica [6] bem como reflete formas distintas de ver e conceber a Matemática, seu ensino e sua aprendizagem. Passando por todas as correntes pedagógicas: Escola Tradicional, Escola Nova, Movimento da Matemática Moderna, as Ideias construtivistas da década de 1980 (vigentes até hoje), nenhuma dessas tendências questionou a importância da Tabuada, suas discordâncias se deram na forma de ensinar [6].

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's, para que o aluno possa desenvolver o pensamento multiplicativo é necessário que seja apresentado a ele problemas matemáticos de quatro tipos: Problemas associados à multiplicação comparativa, Problemas envolvendo a ideia de proporcionalidade, Problemas associados à configuração retangular e Problemas associados à ideia de Combinatória [2].

A área de matemática na Base Nacional Comum Curricular - BNCC [1] está organizada em oito competências e cinco unidades temáticas: Número, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. As unidades Número e Álgebra enfatizam a importância do aluno saber fazer cálculos mentais. Segundo a BNCC, o compromisso do Ensino Fundamental é com o *letramento matemático*, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas, além de destacar na primeira página a experimentação,

> "é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática."

Dentre as oito competências da BNCC específicas da matemática para o Ensino Fundamental está: “Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais ...."

Nessa perspectiva, elaboramos uma proposta de atividade orientada, em total sintonia com a BNCC, para o professor aplicar com seus alunos, desde os Anos Iniciais da Educação Básica, num ambiente de resolução de problemas, onde os alunos irão desenvolver habilidades e competências a partir dos experimentos propostos, sem a preocupação imediata de "decorar", mas por fim, acreditamos que o aluno consiga memorizar completamente a tabuada de multiplicação.

4.1 Oficina de tabuada

1. Apresente a tabuada construindo uma tabela, Figura 2, de dupla entrada com os números $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0326

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	**4**	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	**9**	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	**16**	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	**25**	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	**36**	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	**49**	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	**64**	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	**81**	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	**100**

Figura 2: Tabuada disposta numa tabela de dupla entrada

2. A Figura 2 possui mais números pares ou mais números ímpares? Quantos números de cada tipo ? Os alunos irão se surpreender pois a intuição leva a pensar que tem a mesma quantidade de números pares e ímpares. Nesse momento pode-se introduzir o conceito de paridade.

3. Quais os números presentes na diagonal principal (indicar para o aluno qual é, caso seja necessário!), quais características eles possuem, obedecem a um padrão?

4. Observe que os números que estão de um lado da diagonal principal também estão do outro lado, há uma simetria. Isso ocorre por quê? Aqui é o momento de falar sobre a propriedade comutativa da multiplicação ($a \cdot b = b \cdot a$).

5. Quantas vezes cada número aparece na Figura 2? Aqui os alunos devem ser levados a perceber que há 4 padrões, os números aparecem uma, duas, três ou quatro vezes.

6. Os números da diagonal principal aparecem uma ou três vezes? Por quê? Aqui o professor pode aproveitar para provar a seguinte propriedade dos números que são quadrados perfeitos: **"um número natural é quadrado perfeito se, somente se, tem um número ímpar de divisores."** Nos anos iniciais isso pode ser introduzido por inspeção e no sexto ano isso pode ser provado de forma mais rigorosa.

7. Quantos números diferentes aparecem na Tabela 2? A intuição os leva a pensar que todos os números de 1 a 100 estão presentes. Por que a maioria deles aparecem duas vezes?

8. Construa com os alunos uma Tabela, Figura 3, com os números de 1 a 100 e verifique quais desses números aparecem na Tabela da Figura 2. Dos 42 números que aparecem na tabuada, 23 números: $2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, 28, 30, 32, 35, 40, 45$ estão nas tabuadas de 1 a 5, são mais fáceis para os alunos compreenderem. Outros 6 números: $50, 60, 70, 80$ e 90 obedecem um padrão simples - múltiplo de 10. Os números: $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$ são quadrados perfeitos. Então, a maior dificuldade está nos números cujo o produto é: $42, 48, 54, 56, 63$ e 72, respectivamente, $6 \cdot 7 = 42, 6 \cdot 8 = 48, 6 \cdot 9 = 54, 7 \cdot 8 = 56, 7 \cdot 9 = 63$ e $8 \cdot 9 = 72$, em cor amarela, na Figura 3.

9. Por quê números como $33, 55, 37, 29$, não aparecem na Figura 3? Existem números primos na Figura 3? Constate que apenas os números $2, 3, 5$ e 7, primos, fazem parte!

10. O uso da propriedade distributiva. Por exemplo, $9 \cdot 7 = (5+4) \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 35 + 28 = 63$ ou mesmo $9 \cdot 7 = (10 - 1) \cdot 7 = 70 - 7 = 63$ são estratégias que devem ser usadas com os alunos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 3: Números de 1 a 100 que consta na tabuada

5 Considerações Finais

Como vimos, entre o formalismo matemático que os alunos das licenciaturas precisam aprender e o que eles precisam ensinar na sala de aula da Educação Básica pode parecer, a princípio, haver um grande abismo. Nesse ponto, alguns educadores podem se perguntar se é necessário saber Álgebra para ensinar na educação básica. Responderíamos que é necessário, mas claro, não é suficiente. Reconhecemos que a formação de professores no Brasil ainda não encontrou o equilíbrio entre esses dois polos importantes. Se é óbvio que os futuros professores precisam saber Álgebra, é também claro que eles precisam ser capazes de dialogar com os alunos no nível mais básico possível. Ao nosso olhar, essa distância não pode ser diminuída, ensinando aos futuros professores apenas o que eles irão ensinar em sala de aula. Por outro lado, ensinar Álgebra na universidade sem fazer as devidas conexões com o que o futuro profissional irá trabalhar na sala de aula é um equívoco tão grande quanto não ensinar Álgebra. Acreditamos que a forma que propomos para ensinar a tabuada, disposta numa tabela de dupla entrada, dialoga com a BNCC, e se constitui em um objeto de estudo importante que aborda de forma consistente conteúdos matemáticos importantes para educação básica tais como: paridade, divisores, múltiplos, propriedades da multiplicação, números primos, compostos etc, além de fornecer elementos essenciais para que um aluno consiga, sem a preocupação imediata de decorar, compreender o que está fazendo e memorizar completamente a tabuada da multiplicação.

Referências

[1] BRASIL. **MEC**. Online.Acessado em 31/03/2022. `http://basenacionalcomum.mec.gov.br`.

[2] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Ensino Fundamental. Terceiro e quarto ciclos MEC**.

[3] M. S. Dias. I. Aguiar. **A Construção dos Números Reais e suas Extensões**. Colóquio da Regional Centro Oeste. Rio de Janeiro: UFF, online, 2015.

[4] E. L. Lima. **Análise Real, volume 1. Coleção Matemática Unversitária**. 15a. Rio de Janeiro: IMPA, 2019. ISBN: 9788524404689.

[5] J. J. Luiz. **Elementos de Arithmetica**. 15a. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1914.

[6] J. Nurnberg. "Tabuada: significados e sentidos produzidos pelos professores das Séries Iniciais do Ensino Fundamental. Dissertação". Dissertação de mestrado. UNESC, 2008.

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0326