Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Cálculo fracionário aplicado ao modelo predador-presa de Lotka-Volterra

Wanderley Silva Ferreira Júnior[1] Rubens de Figueiredo Camargo[2]
UNESP, Bauru, SP

Em um ambiente, quando duas ou mais espécies diferentes interagem, a dinâmica populacional pode ser afetada por um grande sistema de relações. De acordo com [5], considerando a relação entre duas espécies diferentes, ocorrem as seguintes principais interações: competição, quando a população de ambas espécies é afetada de forma negativa pela presença da outra; mutualismo ou simbiose, quando a população de ambas espécies é afetada positivamente pela presença da outra e predador-presa, quando a população da espécie predadora é afetada positivamente em decorrência de efeitos negativos na população da outra espécie presa.

O presente trabalho se propõe a estudar a relação predador-presa por meio do sistema de equações diferenciais de Lotka-Volterra, bem como a sua versão fracionária, envolvendo derivadas de ordem não inteira em sua construção. O título do modelo referencia Alfred James Lotka e Vito Volterra, que por volta de 1925 tiveram as mesmas conclusões de forma independente acerca da relação predador-presa, através de equações diferenciais não lineares que mostram a interação entre duas populações de forma oscilatória e periódica em um ambiente [1]. Cabe ressaltar que este sistema apresenta uma série de importantes aplicações, por exemplo, em toda biomatemática, controle de pragas, dinâmicas tumorais, economia, controles ótimos e agroecossistemas (alguns exemplos podem ser verificados em [3]).

O modelo Lotka-Volterra é dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais, considerando a, b, c e d constantes:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = & ax - bxy = & x(a - yb), \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = & -cy + dxy = & -y(c - xd). \end{cases} \tag{1}$$

Por se tratar de um sistema para expressar a relação predador-presa em decorrência do tempo t, no processo de modelagem, conforme [6] e [4], $x(t)$ representa a população de presas, $y(t)$ a população de predadores, a é a taxa de crescimento de $x(t)$ quando não existem predadores, b é a taxa de decréscimo de $x(t)$ por conta dos ataques dos predadores, c é a taxa de mortalidade de $y(t)$ quando não existem presas e d é a taxa de crescimento de $y(t)$ por conta das interações com as presas. No sistema apresentado em [4], é considerado que caso os predadores estejam ausentes, a população de presas em algum momento crescerá exponencialmente. Caso as presas estejam ausentes, a população de predadores em algum momento decrescerá exponencialmente.

A utilização de modelos como Lotka-Volterra, que usa de equações diferenciais, auxilia na compreensão de processos físicos à medida em que suas equações são detalhadas e aprofundadas [4]. No entanto, conforme [2], tal modelo apresenta diversas restrições para o processo de modelagem:

[1]wanderley.ferreira@unesp.br
[2]rubens.camargo@unesp.br

os predadores não se adaptam a uma nova presa na ausência da primeira, morrendo de fome; a população de presas aumenta exponencialmente caso não existam predadores; os predadores podem se alimentar infinitamente de suas presas e não existe complexidade ambiental.

Por outro lado o Cálculo de Ordem Arbitrária, tradicionalmente conhecido por Cálculo Fracionário (CF), vem se consagrando como uma importante ferramenta na descrição de sistemas reais, são inúmeros os exemplos de modelagem de ordem arbitrária que oferecem uma descrição mais precisa para a realidade, que a respectiva modelagem de ordem inteira [2].

Desta forma, o objetivo central deste trabalho é estudar o modelo de ordem inteira e utilizar a modelagem de ordem não inteira, por meio das derivadas de Caputo, com o intuito de minimizar o efeito das simplificações do modelo original, incorporando os chamados efeitos de memória. Visto que o modelo é não linear serão utilizadas ferramentas computacionais e métodos numéricos para resolver o sistema e analisar sua estabilidade. Por fim, de posse destes resultados comparar qualitativamente os modelos de ordem inteira e de ordem não inteira.

Referências

[1] M. -C. Anisiu. "Lotka, Volterra and their model". Em: **Didáctica mathematica** 32 (2014), pp. 9–17.

[2] R. F. Camargo. "Cálculo Fracionário e Aplicações". Tese de doutorado. Unicamp, 2009.

[3] A. V. Gomes. "Transformadas integrais, modelagem fracionária e o sistema de Lotka-Volterra". Dissertação de mestrado. Unesp, 2014.

[4] A. V. Gomes et al. "Cálculo fracionário para o sistema de Lotka-Volterra". Em: **CMAC Sudeste 2013** (2013), pp. 666–671.

[5] J. D. Murray. **Mathematical biology: I. An introduction. Interdisciplinary applied mathematics**. 3a. ed. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 0-387-95223-3.

[6] R. B. Pata. **Modelo de Lotka-Volterra para a Dinâmica Predador-Presa**. Universidade Federal do Pampa. 2017.