Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Um sistema de tableaux para PM4N

Romulo Albano de Freitas[1], Hércules de Araujo Feitosa[2], Marcelo Reicher Soares[3]
Departamento de Matemática, FC/UNESP, Bauru, SP

Este trabalho fora pensado enquanto buscávamos por alguns desenvolvimentos com a lógica **PM4N**, lógica esta resultante do trabalho de Beziau [1].

Beziau [1] introduziu **PM4N** como uma lógica modal e 4-valorada. O sistema foi proposto com o intuito de manter muitas das noções principais das lógicas modais, mas veremos alguns casos de ruptura, como na Figura 3. No presente trabalho propomos um sistema de tableaux, considerando detalhes da semântica matricial de **PM4N**.

A partir do modelo matricial para **PM4N** nós elaboramos um sistema de tableaux completamente adequado para esta lógica [2].

Nós denotamos este sistema por $\mathcal{T}_{PM4N}$.

Buscamos tableaux com menos de quatro ramificações, o que seria o usual para lógicas com quatro valores. Como primeiro passo, tomaremos as seguintes notações: $f \in \{0, n\}$ para os valores falsos, ou de maneira equivalente, o conjunto dos elementos não-designados da semântica matricial, e $t \in \{b, 1\}$ para os valores verdadeiros, ou de modo dual aos não-designados, o conjunto dos elementos designados da semântica matricial. Além de termos as regras de expansão para os conectivos e operadores, teremos, também, as regras de expansão de f e t, como na Figura 1.

$$\begin{array}{c} f \quad \varphi \\ \hline 0\ \varphi \quad | \quad n\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} t \quad \varphi \\ \hline b\ \varphi \quad | \quad 1\ \varphi \end{array}$$

Figura 1: Regras de expansão para f e t.

Na tentativa de economizarmos no tamanho das árvores, criamos as regras de expansão para f e t e com isso fizemos a redução, também, das demais regras. Vejamos um exemplo para a regra da conjunção com a valoração 'b' na Figura 2.

∧	0	n	b	1
0	0	0	0	0
n	0	n	0	n
b	0	0	**b**	**b**
1	0	n	**b**	1

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} b \qquad \varphi \wedge \psi \\ \hline \begin{array}{c|c|c} b\ \varphi & b\ \varphi & 1\ \varphi \\ b\ \psi & 1\ \psi & b\ \psi \end{array} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} b \qquad \varphi \wedge \psi \\ \hline \begin{array}{c|c} b\ \varphi & 1\ \varphi \\ t\ \psi & b\ \psi \end{array} \end{array}$$

Figura 2: Desenvolvimento da regra da conjunção para valoração 'b'.

A economia também acontece para com as regras de fechamento. Vejamos as seguintes definições.

[1] r.freitas@unesp.br
[2] hercules.feitosa@unesp.br
[3] reicher.soares@unesp.br

Definição 0.1. *Nos tableaux de $\mathcal{T}_{\boldsymbol{PM4N}}$, um ramo é fechado se um dos seguintes casos ocorrerem no caminho:*

(i) $k_1 \ \ \varphi$ *e* $k_2 \ \ \varphi$*, para qualquer fórmula* φ *e* $k_1 \neq k_2$*;*

(ii) $n \ \ \Box\varphi$ *ou* $b \ \ \Box\varphi$*, para qualquer fórmula* $\Box\varphi$*;*

(iii) $n \ \ \Diamond\varphi$ *ou* $b \ \ \Diamond\varphi$*, para qualquer fórmula* $\Diamond\varphi$*.*

Definição 0.2. *Tableaux de* $\mathcal{T}_{\boldsymbol{PM4N}}$ *são fechados quando todos os seus ramos são fechados.*

Do item **(i)**, sabemos que se uma fórmula ocorrer com valores distintos no ramo, então o ramo é fechado, **(i)** também vale para as fórmulas marcadas com f e t, se tivermos um ramo com $f \ \ \varphi$ e $t \ \ \varphi$, para qualquer fórmula φ, então fechamos o ramo sem precisarmos fazer a expansão de f e t. Já o item **(ii)** segue da semântica matricial, em que vemos que os operadores modais não ocorrem com os valores 'n' e 'b' e, portanto, se tivermos operador modal com o valor 'n' ou 'b' no ramo, então o ramo é fechado.

Vejamos um exemplo do funcionamento do nosso sistema de tableaux em que se mostra a não validade da Regra da Necessitação [3] no sistema **PM4N**.

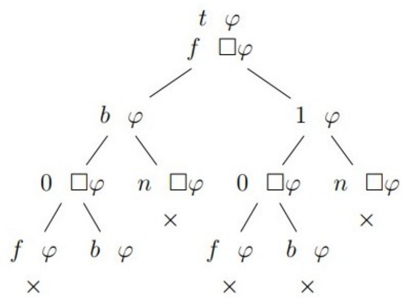

Figura 3: Um contraexemplo para **RN**: $\varphi \nVdash \Box\varphi$.

Como característico dos métodos de tableaux, nossa árvore também retorna um contraexemplo ao mostrar a não validade de **RN**. Existe um ramo aberto, quando temos $v(\varphi) = b$. Então a árvore não é fechada apenas quando $v(\varphi) = b$. A noção implícita nessa dedução é que se uma fórmula leva apenas o valor 1, então a fórmula é necessária e a regra pode ser aplicada. Ou seja, apenas a "verdade forte" é necessária no sistema.

Referências

[1] J. Y. Beziau. "A new four-valued approach to modal logic". Em: **Logique Et Analyse** 54 (2011), pp. 109–121.

[2] W. A. Carnielli. "Systematization of finite many-valued logics through the method of tableaux". Em: **Journal of Symbolic Logic** 52 (1987), pp. 473–493. DOI: 10.2307/2274395.

[3] B. Chellas. **Modal logic: an introduction**. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. ISBN: 9780511621192.

