Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Uma Abordagem para a Interpretação Física e Geométrica da Integral e da Derivada Fracionárias

Matheus Pereira de Melo[1]
Licenciatura em Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru
Rubens de Figueiredo Camargo[2]
Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru

Muito empenho tem sido destinado ao problema da interpretação física e geométrica da integral e da derivada fracionárias, que desde o surgimento do Cálculo Fracionário, por mais de 300 anos, não se obteve solução amplamente aceita, o que talvez tenha colaborado para seu uso e desenvolvimento tardio em aplicações [2, 4]. Apesar disso o Cálculo Fracionário tornou-se uma importante ferramenta na modelagem de sistemas físicos e biológicos, principalmente devido aos resultados, que, em muitos casos, ofereciam descrições mais precisas para diversos fenômenos [1, 2], provavelmente devido a incorporação dos efeitos de memória e ao embutir na ordem da derivada o efeito dos parâmetros negligenciados, na modelagem usual.

Neste trabalho destacamos uma abordagem para a interpretação física e geométrica da integral e da derivada fracionárias considerando as definições de Riemann-Liouville.

A integral de Riemann-Lioville à esquerda é definida por:

$$ {}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad 0 \le \tau \le t. \tag{1}$$

Tomando t um valor fixo, pode-se reescrever (1) como:

$$ {}_0I_t^\alpha f(t) = \int_0^t f(\tau) dg_t(\tau), \tag{2}$$

onde

$$ g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (t^\alpha - (t-\tau)^\alpha). \tag{3}$$

Considerando a existência de duas escalas temporais [4] a integral em (2) pode ser fisicamente interpretada como a distância $S_R(t)$ observada de acordo com o tempo não homogêneo, ou ainda, a distância real percorrida por um objeto se observado seu tempo individual, em que $g_t(\tau)$ é a escala de tempo transformada. Destaca-se que a não localidade dos operadores fracionários pode ser notada no fato de que $g_t(\tau)$ além de depender do tempo τ depende também do parâmetro t, visto que este é interpretado como o último valor medido no tempo individual do objeto em movimento e que qualquer alteração neste parâmetro acarreta mudanças em todo o tempo que antecede. Por outro lado a derivada fracionária de Riemann-Liouville à esquerda da função $S_R(t)$:

$$ {}_0D_t^\alpha S_R(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{S_R(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}; 0 < \alpha < 1, \tag{4}$$

[1] pereira.melo@unesp.br
[2] rubens@fc.unesp.br

é vista como a velocidade $v(t)$ de acordo com o tempo individual do objeto. Assumindo a ordem da derivada em (4) como $1-\alpha$, ou seja, derivando $S_R(t)$ em relação a t, obtemos:

$$v_R(t) = \frac{d}{dt}\,{}_0I_t^{\alpha}v(t) = \,{}_0D_t^{1-\alpha}v(t), \tag{5}$$

que é a velocidade de acordo com a escala de tempo transformada e novamente podemos notar a não localidade do operador, visto que esta relação depende de τ e do parâmetro t.

Para a interpretação geométrica da integral em (2) a abordagem consiste na projeção da região entre as curvas $(\tau, g_t(\tau))$ e $(\tau, g_t(\tau), f(\tau))$ nos planos ordenados. Desta forma, a área abaixo da curva $(\tau, 0, f(\tau))$ corresponde ao valor de ${}_0I_t^1 f(t)$ e a área abaixo da curva $(0, g_t(\tau), f(\tau))$ corresponde ao valor de ${}_0I_t^{\alpha} f(t)$, assim como ilustra o gráfico da figura 1.

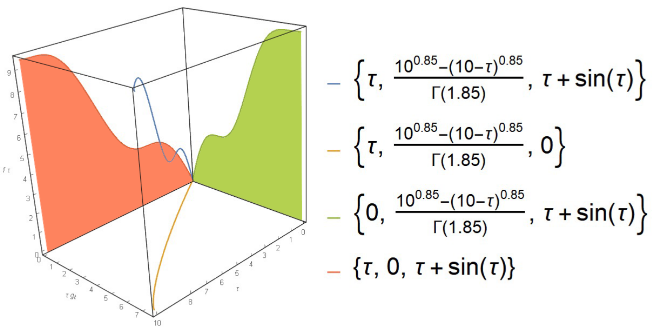

Figura 1: Dinâmica da interpretação geométrica de ${}_0I_t^1 f(t)$ e ${}_0I_t^{0.85} f(t)$, considerando $f(t) = t + \sin(t)$ e $0 \leq \tau \leq 10$.

De maneira análoga pode-se abordar a integral de Riemann-Liouvile à direita, potencial de Riesz, potencial de Feller, a Derivada de Caputo e ainda a Integral de Convolução de Volterra [4].

Pode-se concluir que o problema da falta de interpretação física e geométrica da integral e da derivada fracionárias requer abordagens diferentes das utilizadas em suas contrapartes clássicas, assim como foi destacado neste trabalho a tratativa de um caso particular. Ainda, entende-se que estas interpretações evidenciam o potencial do Cálculo Fracionário e a propriedade não local de seus operadores da qual decorrem os efeitos de memória proporcionados pelo CF [3, 4].

Agradecimentos

Agradecemos a FAPESP pela bolsa concedida - Processo: 2021/03424-2.

Referências

[1] R. F. Camargo. "Cálculo Fracionário e Aplicações". Tese de doutorado. IMECC/UNICAMP, 2009.

[2] R. F. Camargo e E. C. Oliveira. **Cálculo Fracionário**. 1a. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. ISBN: 978-85-7861-329-7.

[3] R. Herrmann. **Fractional calculus: an introduction for physicists**. 2a. ed. Germany: World Scientific Publishing, 2014. ISBN: 978-9814551076.

[4] I. Podlubny. **Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation**. 2001. arXiv: `math/0110241 [math.CA]`.