Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Estudo Comparativo entre os Métodos da Potência, LR e QR para Estimar o Autovalor Dominante de uma Matriz

Modesto Valci Moreira Lopes[1]
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, USP, SP
Hedjany Sena da Silva[2] Ivan Mezzomo[3] Matheus da Silva Menezes[4]
Departamento Ciências Naturais, Matemática e Estatística, UFERSA, Mossoró, RN
Stefeson Bezerra de Melo[5]
Departamento de Ciências Exatas, Tecnológicas e Humanas, UFERSA, Campus Angicos, RN

As razões que fazem com que o estudo dos autovalores serem tão importantes em áreas como matemática e engenharia são muitas, uma vez que eles possuem várias aplicações tais como reconhecimento facial por computadores, teoria da estabilidade, Page Ranking do Google, análise de frequências naturais e modo de vibrações, entre outros.

O objetivo desse trabalho é identificar dentre os métodos da Potência, LR e QR, qual é o mais eficiente em relação ao tempo de processamento e em relação ao número de iterações para estimar o autovalor dominante das matrizes propostas. A grande vantagem é que esses métodos não recorrem a expansão direta do determinante da matriz. Os métodos estão definidos abaixo.

Teorema 1 [Método da Potência (MP)][2]: *Dado uma matriz real quadrada A de ordem n e seus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ com seus correspondentes autovetores $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Suponha que os autovetores são lineramente independentes e que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. A sequência y_k definida por*

$$y_{k+1} = Ay_k \tag{1}$$

com $k = 1, 2, \ldots,$ onde y_0 é um vetor arbitrário que permite a expansão $y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$, com c_j escalares quaisquer e $c_1 \neq 0$, então $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1$, onde r indica a r-ésima componente.

Quanto maior for $|\lambda_1|$ quando comparado com $|\lambda_2|$, mais rápida será a convergência.

Método de Rutishauser (LR) [2]: Seja A uma matriz quadrada de ordem n, o método LR consiste em construir uma sequência de matrizes através da decomposição LU da seguinte forma:

$$A_k = R_{k-1}L_{k-1} = L_k R_k \tag{2}$$

onde L representa uma matriz triangular inferior com todos os elementos da diagonal principal 1, R é uma matriz triangular superior e k o número de iterações. Os elementos diagonais da matriz A_k serão os autovalores da matriz A.

[1]modsval@usp.br
[2]hedjany@icloud.com
[3]imezzomo@ufersa.edu.br
[4]matheus@ufersa.edu.br
[5]stefeson@ufersa.edu.br

Método de Francis (QR) [1]: Seja A uma matriz real simétrica quadrada tridiagonal de ordem n, o método QR consiste em construir uma sequência de matrizes da seguinte forma:

$$A_k = R_{k-1}Q_{k-1} = Q_k R_k \tag{3}$$

na qual Q é uma matriz ortogonal, R é uma matriz triangular superior e k é o número de iterações. Para obtermos a matriz tridiagonal, foi aplicado o método de Householder, que reduz uma matriz simétrica arbitrária a uma matriz tridiagonal semelhante.

Os métodos foram implementados no software MatLab R2014a em máquina i5 de processador 2.90 GHz e 8 GB de memória RAM. Como critério de parada foi usado o erro absoluto com precisão de 10^{-4}. As matrizes utilizadas foram obtidas a partir do repositório Florida Sparse Matrix Collection. Os resultados do experimentos realizados em relação ao tempo de processamento em segundos, estão dispostos na tabela abaixo.

Tabela 1: Resultado dos experimentos realizados

Problema	Ordem	Autovalor	MP		LR		QR	
			Iter.	Tempo (s)	Iter.	Tempo (s)	Iter.	Tempo (s)
bcsstk01	48	$3{,}0152\times10^9$	809	2,1050	1002	0,70996	1128	0,46445
rbd200l	200	9,16394	14	0,0550	207	1,2286	89	0,4733
pde225	225	8,5686	23	0,3218	16	0,08935	158	1,1583
bcsstk06	420	$3{,}4910\times10^9$	26	0,1356	3	0,04259	N/C	N/C
rdb800l	800	30,5453	92	0,1030	517	44,8074	286	27,449654
can_838	838	15,8093	27	0,1024	3	0,281934	8	0,819140
gr_30_30	900	0,418278	22	0,1377	32	3,8858	641	82,3668

Analisando os resultados apresentados na Tabela 1, podemos notar que para as matrizes estudadas quanto ao tempo de processamento, o MP apresentou maior eficiência em 57,14% dos problemas enquanto o método LR apresentou maior eficiência em 28,57% e o Método QR foi mais eficiente em 14,29% dos problemas. Quanto ao número de iterações, o MP apresentou maior eficiência em 57,14% dos problemas enquanto o método LR apresentou maior eficiência em 42,86% dos problemas. Note que o método QR não apresentou eficiência em nenhum dos problemas e não convergiu na matriz bcsstk06. Nos problemas pde225 e bcsstk06 o método LR foi mais eficiente tanto em relação ao número de iterações quanto ao tempo de processamento, enquanto o MP foi mais eficiente em ambos os casos nos problemas rdb800l e gr_30_30.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPq na execução deste trabalho.

Referências

[1] R.L. Burden, D. Faires e A.M. Burden. **Análise Numérica**. 3a. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015. ISBN: 9788522123407.

[2] N. B. Franco. **Cálculo Numérico**. 6a. ed. São Paulo: Pearson, 2006. ISBN: 9788576050870.