Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Resolução Numérica de Problemas de Valor Inicial de Primeira Ordem

Abdiel J. A. da Silva[1] Matheus da S. Menezes[2], Ivan Mezzomo[3] Stefeson B. M.[4]
CCEN/UFERSA, Mossoró, RN

Equações diferenciais estão presentes em vários ramos da ciência, incluindo as ciências exatas e naturais, sendo definidas, de forma objetiva, como equações que contém derivadas em sua estrutura [4]. Dentre os seus tipos, temos as equações diferenciais ordinárias (EDO's) que englobam aquelas com apenas uma variável independente[3]. A solução de uma EDO gera uma família de curvas, podendo ser reduzidas a uma solução particular através de um problema de valor inicial (PVI) [1]. Este trabalho tem como objetivo, analisar comparativamente a precisão do resultado com a utilização dos métodos numéricos de Euler, Heun e Range Kutta de 4.º ordem na resolução de EDO's de primeira ordem, bem como efetuar a análise dos erros absolutos e relativos.

De acordo com [2] o método de Euler constitui uma das técnicas mais simples para aproximação de soluções de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com um PVI conhecido. Este método parte de um ponto inicial e projeta um novo ponto por meio da reta tangente. A expressão geral é dada por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i)]. \tag{1}$$

Ao aplicar esse método, encontraremos uma aproximação para (y_{i+1}) que implica em um erro em relação ao valor real de $f(t_{i+1})$. De acordo com a expressão geral, para projetar um ponto precisamos das coordenadas do ponto anterior, desta forma, a taxa de erro tende a aumentar de um ponto para outro, principalmente ao analisarmos intervalos de grande amplitude. Neste sentido, temos que o método de Heun apresenta uma estratégia que busca melhorar a estimativa da inclinação da reta tangente, envolvendo a utilização de duas derivadas, uma no ponto inicial e outra no ponto final. O método de Heun trabalha com o ponto médio dessas duas inclinações da seguinte forma:

$$\varphi = \frac{f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})}{2}.$$

Já o método de Range Kutta de quarta ordem é um dos mais utilizados para esta análise de EDO's, pois analisa mais pontos do intervalo, buscando uma melhor aproximação da solução real e é dado pela seguinte expressão.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4],\ onde. \tag{2}$$

onde $k_1 = f(t_i, y_i)$; $k_2 = f(t_i + 0.5h, y_i + 0,5hk_1)$; $k_3 = f(t_i + 0.5h, y_i + 0,5hk_2)$; $k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3)$. A definição dos pesos k_1, k_2, k_3 e k_4 gera várias versões do método de Range Kutta. Para a presente análise, utilizamos os valores adotados na literatura acadêmica definidos em [2].

[1]abdielj.alves@gmail.com
[2]matheus@ufersa.edu.br
[3]imezzomo@ufersa.edu.br
[4]stefeson@ufersa.edu.br

Vamos efetuar um comparativo entre as aproximações obtidas pelos métodos numéricos e o valor analítico de uma EDO no intervalo $i = [0; 0.5]$ com variação do espaçamento $h = 0.1$ e $h = 0.01$, de modo a analisar o erro produzido a cada passo em cada um dos métodos abordados anteriormente. Para isto, considere o seguinte PVI:

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I, \quad \text{com } I(0) = 0. \tag{3}$$

A solução exata do problema dado em (3) é $I(t) = 5 - 5e^{-3t}$. Os resultados obtidos estão apresentados nas Tabelas 1 e 2.

Tabela 1: Resultados do problema para $h = 0,1$.

Variável t	I (Real)	I (Euler)	Erro Euler	Erro Euler (%)	I (Heun)	Erro Heun	Erro Heun (%)	I (R.K.)	Erro R.K.	Erro R.K. (%)
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1000	1.2959	1.5000	0.2041	15.7489	1.2750	0.0209	1.6135	1.2958	0.0001	0.0074
0.2000	2.2559	2.5500	0.2941	13.0348	2.2249	0.0311	1.3771	2.2558	0.0001	0.0063
0.3000	2.9672	3.2850	0.3178	10.7122	2.9325	0.0346	1.1668	2.9670	0.0002	0.0053
0.4000	3.4940	3.7995	0.3055	8.7427	3.4597	0.0343	0.9815	3.4939	0.0002	0.0045
0.5000	3.8843	4.1597	0.2753	7.0874	3.8525	0.0318	0.8198	3.8842	0.0001	0.0037

Tabela 2: Resultados do problema para $h = 0,01$.

Variável t	I (Real)	I (Euler)	Erro Euler	Erro Euler (%)	I (Heun)	Erro Heun	Erro Heun (%)	I (R.K.)	Erro R.K.	Erro R.K. (%)
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1000	1.2959	1.3129	0.0170	1.3095	1.2957	0.0002	0.0132	1.2959	0.0000	0.0000
0.2000	2.2559	2.2810	0.0251	1.1120	2.2557	0.0003	0.0112	2.2559	0.0000	0.0000
0.3000	2.9672	3.9950	0.0278	0.9374	2.9669	0.0003	0.0095	2.9672	0.0000	0.0000
0.4000	3.4940	3.5214	0.0274	0.7845	3.4938	0.0003	0.0079	3.4940	0.0000	0.0000
0.5000	3.8843	4.9097	0.0253	0.6519	3.8841	0.0003	0.0066	3.8843	0.0000	0.0000

Os dados apresentados nas Tabelas 1 e 2 mostram que o método de Range Kutta de quarta ordem, obteve as melhores aproximações com as menores taxas de erros em ambos os tamanhos de passo h abordados, seguido pelo método de Heun, enquanto o método de Euler obteve os piores resultados. Também podemos observar que quanto menor o valor de h, menor tende a ser o erro obtido em todos os métodos analisados e o comportamento da solução expressa pelos métodos numéricos tende a se aproximar melhor do resultado analítico.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPq na execução deste trabalho.

Referências

[1] L.C. Barroso e M. M. A. Barroso. **Cálculo Numérico (com aplicações)**. 2a. ed. São Paulo: Harbra, 1987.

[2] S. Chapra. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas**. 3a. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

[3] J. Stewart. **Cálculo**. 7a. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[4] D.G. Zill e M.R. Cullen. **Equações Diferenciais**. 3a. ed. São Paulo: Pearson, 2001.