Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Simulações Numéricas de Equações Diferenciais do tipo Schrödinger não Linear

Felipe Eduardo dos Santos[1] Denise Bulgarelli Duczmal[2]
UFMG, Belo Horizonte, MG
Luccas Cassimiro Campos[3]
Unicamp, Campinas, SP

Equações do tipo Schrödinger não linear são de grande uso para modelar diversos fenômenos físicos, notoriamente aqueles que descrevem ondas não lineares em meios dispersivos, como por exemplo a propagação de ondas de luz em meios não lineares, ou a dinâmica de um condensado de Bose-Einstein [1, 6].

O grupo de equações a ser estudado é:

$$i\partial_t u + \Delta u + |x|^{-b}|u|^{p-1}u = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

em que $N \geq 1$, $b \geq 0$ e $p > 1$. Equações diferenciais parciais não lineares trazem consigo um leque de novos desafios, de forma que a teoria sobre boa colocação de tais equações ainda está em desenvolvimento. Por exemplo, em dimensões $N = 1$ e $N = 2$, espera-se que possamos ter boa colocação em $H^1(\mathbb{R}^N)$ (e nos espaços de Strichartz auxiliares) para quaisquer $p > 1$ e $0 \leq b < N$, mas analiticamente só se tem atualmente $0 \leq b < N/2$ [4]. Similarmente, em dimensão $N = 3$, espera-se $0 \leq b < 2$, mas só se conhecem resultados analíticos para $0 \leq b < 3/2$ [2]. Portanto, métodos numéricos são usados para auxiliar os pesquisadores na análise do comportamento de soluções que estão fora do alcance da teoria analítica.

Nosso objetivo é simular numericamente essas equações, de forma a estudar seu comportamento local e global. Estamos interessados em analisar tais equações em diversos domínios e com parâmetros diferentes, em especial nos casos em que a boa-colocação ainda não é totalmente entendida pela teoria analítica. Pela deficiência de soluções explícitas para a equação de Schrödinger, nos métodos utilizados, preocupamo-nos em garantir que a energia e massa discretas das soluções sejam conservadas.

A respeito dos métodos numéricos a serem implementados, na literatura contamos com diversos tipos de métodos que são bem sucedidos em suas propostas, como por exemplo métodos pseudo-espectrais como "split-Step Fourier Transform", e métodos de diferenças finitas, analisados no caso unidimensional em [3]. Para que a energia e massa discretas sejam conservadas, escolhemos a abordagem de diferenças finitas descrita em [5], usando o método de "Crank-Nicolson" para a discretização do laplaciano, e uma aproximação do termo não linear que conserva as grandezas requeridas. Como o método utilizado é implícito, ainda é necessário resolver a cada passo, um sistema não linear, o que é feito iterativamente usando o método de Newton.

[1]felipe.eduardo.dos@gmail.com
[2]bulgarelli@ufmg.br
[3]luccas@ime.unicamp.br

Agradecimentos

A Universidade Federal de Minas Gerais, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - PIBIC, e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) processo nº 2020/10185-1, pelo auxilio financeiro.

Referências

[1] Mark J Ablowitz et al. **Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems**. Vol. 302. Cambridge University Press, 2004.

[2] Luccas Campos. "Scattering of radial solutions to the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation". Em: **Nonlinear Anal.** 202 (2021), Paper No. 112118, 17. ISSN: 0362-546X. DOI: 10.1016/j.na.2020.112118. URL: https://doi.org/10.1016/j.na.2020.112118.

[3] Neveen G A Farag et al. "On the Analytical and Numerical Solutions of the One-Dimensional Nonlinear Schrodinger Equation". Em: **Mathematical Problems in Engineering** 2021 (nov. de 2021), p. 3094011.

[4] Carlos M Guzmán. "On well posedness for the inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation". Em: **Nonlinear Anal. Real World Appl.** 37 (2017), pp. 249–286. ISSN: 1468-1218.

[5] Oussama Landoulsi, Svetlana Roudenko e Kai Yang. **Interaction with an obstacle in the 2d focusing nonlinear Schrödinger equation**. 2021. DOI: 10.48550/ARXIV.2102.02170. URL: https://arxiv.org/abs/2102.02170.

[6] Jianke Yang. **Nonlinear waves in integrable and nonintegrable systems**. SIAM, 2010.

