Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Preliminar da Utilização do Método dos Mínimos Quadrados no Método das Potências

Modesto Valci Moreira Lopes[1]
Hedjany Sena da Silva[2]
Ivan Mezzomo[3]
Matheus da Silva Menezes[4]
Departamento Ciências Naturais, Matemática e Estatística, UFERSA, Mossoró, RN
Stefeson Bezerra de Melo[5]
Departamento de Ciências Exatas, Tecnológicas e Humanas, UFERSA, Campus Angicos, RN

O Método das Potências consiste em determinar o maior autovalor e seu autovetor associado de uma matriz quadrada de ordem n, sem a necessidade de se determinar o polinômio característico. No entanto, esse método é eficiente a medida que o maior autovalor em módulo, for bem espaçado em relação aos demais e também se seus autovetores forem linearmente independentes.

Entretanto, a existência de problemas mais complexos atrelada a altas ordens de matrizes, corrobora na utilização de artifícios e outros modelos matemáticos que auxiliem o Método das Potências a se aproximarem das soluções de forma mais rápida e eficaz. Sendo assim, modelos como a Aceleração de Aitken e Método das Potências com Deslocamento são bastante utilizados para a aceleração do método em questão. No entanto, como qualquer outro método numérico, estes modelos apresentam algumas restrições e geralmente aceleram as soluções em faixas limitadas [2].

Tendo em vista disso, neste trabalho iremos abordar acerca de um estudo introdutório na tentativa de propor uma nova aceleração para o Método das Potências baseado no Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). O objetivo principal deste trabalho é fazer uma análise em relação ao número de iterações para estimar qual a função de aproximação do MMQ melhor se ajusta a uma quantidade inicial de soluções aproximadas na tentativa de encontrar o autovalor dominante dos problemas propostos.

Teorema 1 [Método das Potências (MP)] [1]: *Dada uma matriz real quadrada A de ordem n e seus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ com seus correspondentes autovetores $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Suponha que os autovetores são lineramente independentes e que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. A sequência y_k definida por*

$$y_{k+1} = Ay_k, \tag{1}$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots,$ onde y_0 é um vetor arbitrário que permite a expansão $y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$, com c_j escalares quaisquer e $c_1 \neq 0$, então $\lim_{k\to\infty} \frac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1$, onde r indica a r-ésima componente.

Quanto maior for $|\lambda_1|$ quando comparado com $|\lambda_2|$, mais rápida será a convergência.

[1]modsval@gmail.com
[2]hedjany@icloud.com
[3]imezzomo@ufersa.edu.br
[4]matheus@ufersa.edu.br
[5]stefeson@ufersa.edu.br

De acordo com [1], o MMQ tem por objetivo aproximar um conjuto de n pontos distintos por uma função $F(x)$ de tal modo que a distância desse conjunto de n pontos a $F(x)$ seja a menor possível (caso discreto). Após um número pré determinado de iterações do Método das Potências, será utilizado o Método dos Mínimos Quadrados na qual será realizada a implementação das suas respectivas funções de aproximação (linear, polinomial, logarítmica, exponencial e potência), com o intuito de averiguar qual destas funções melhor se ajustam aos pontos dados pelo Método das Potências e que melhor se aproxima do autovalor dominante de cada problema.

As matrizes foram obtidas através do repositório Florida Sparse Matrix Collection. Visando analisar a funcionalidade do algoritmo proposto, efetuamos a implementação dos métodos no MatLab2014a em uma máquina com processador Intel Core i5, 4GB de RAM e sistema operacional Windows 10. Como critério de parada, usamos o teste do erro absoluto para cada λ_1, dada por $|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|_r < \epsilon$, com precisão 10^{-3} ou 10.000 iterações. A análise da aceleração se deu através da comparação entre o número de iterações (Tabela 2).

Tabela 1: Resultado dos experimentos realizados

Problema	Ordem	MP		MMQ			Erro Absoluto
		Autovalor	Iter.	F. Aprox.	Autovalor	Iter.	
bcsstk01	48	3.0152×10^{9}	809	Potência	3.0152×10^{9}	684	9.559×10^{-5}
bcsstk22	138	5.8501×10^{6}	284	Polinomial	5.8514×10^{6}	101	2.1946×10^{-4}
pde225	225	8.4723	1627	Polinomial	8.4689	510	4.0248×10^{-4}
bcsstk14	1806	N/C	N/C	Polinomial	9.2537×10^{10}	3546	–
bcsstk13	2003	3.1148×10^{12}	2849	Polinomial	3.1131×10^{12}	1011	5.5569×10^{-4}
cavity20	4562	14.293	2058	Polinomial	14.2894	800	2.5435×10^{-4}
af23560	23560	N/C	N/C	Polinomial	270.3446	3682	–

Através dos resultados obtidos acima, podemos averiguar que o Método dos Mínimos Quadrados foi capaz de acelerar o processo de aproximação do resultado para o maior autovalor da matriz em uma faixa entre 25,46% e 69,66%, e nos problemas bcsstk14 e af23560 o Método das Potências não convergiu no limite de 10.000 iterações enquanto o MMQ teve um resultado satisfatório. Além disso, notamos que o comportamento da curva de aproximação do Método das Potências é de natureza polinomial (em sua maioria), possibilitando então o desenvolvimento de possíveis outras estratégias para a aceleração do método com base em sua curva. Portanto, podemos afirmar que a realização dos testes acima, seguido dos respectivos diagnósticos proporcionou a oportunidade de desenvolvimento de novos estudos para aplicação do MMQ e também no estudo de uma nova abordagem de aceleração para o Método das Potências. O tempo de processamento não foi considerado neste trabalho devido ao tempo irrisório de convergência ou por não apresentar melhoria considerável.

Agradecimento

Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPq na execução deste trabalho.

Referências

[1] Franco, N. B. *Cálculo Numérico, 6a Edição*. Pearson, São Paulo, 2006.

[2] Lopes, M. V., Silva, H. S., Mezzomo, I., Menezes, M. S. and Melo, S. B. Estudo do Método das Potências e Método das Potências com Aceleração de Aitken, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, 6 (1), 010135-1 – 010135-2, 2018.