Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Modelo de Lotka-Volterra e Controlabilidade Matemática

Adriana Washington Henarejos[1]
Departamento de Matemática/UFSC, Blumenau, SC
Francis Félix Córdova Puma [2]
Departamento de Matemática/UFSC, Blumenau, SC

Neste trabalho, objetiva-se tratar da temática da existência do controle em modelos matemáticos. Em específico, será tratada da problemática da controlabilidade local do modelo de Lotka-Volterra. Trata-se de um sistema de equações diferenciais ordinárias que abstrai e simplifica, num determinado ambiente, uma relação de presa-predador. Desse modo, o modelo é usado para descrever as dinâmicas em sistemas biológicos, nos quais há duas populações.

O modelo de Lotka-Volterra define-se por um par de equações diferenciais, de primeira ordem, não lineares. O sistema é dado por (1):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & ax - cxy \\ \frac{dy}{dt} & = & -by + dxy \end{array} \right. \tag{1}$$

em que, x é a densidade da população de presas (no instante t); y é a densidade da população de predadores (no instante t); a é o coeficiente de crescimento das presas; b é o coeficiente de decrescimento dos predadores; c é o coeficiente de morte das presas por predador e d é o coeficiente de predadores devido a existência de presas [1]. Denotaremos por $z = (x, y)$ o vetor das populações, $z_0 = (x_0, y_0)$ os dados iniciais (no instante $t = 0$) e por $F(z, t)$ o campo de velocidades de tal forma que a equação (1) pode ser reescrita como:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z'(t) & = & F(z,t) \\ z(0) & = & z_0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Pode-se observar que, há no modelo foco um movimento cíclico, claramente perceptível nos gráficos que representam o modelo [1]. A motivação para o trabalho surge da eventual necessidade de interromper esse ciclo, por algum motivo. A partir de tal carência, trabalha-se com a hipótese de que seja necessário controlar a população de presas, visando que essas não se desenvolvam descontroladamente e se tornem pragas para a espécie humana. Para o estudo desse problema, faz-se necessário perturbar o campo de velocidades dado em (2), isto é, $F(z, t, u) = F(z, t) + Bu$. Em que $B = [1\ 0]^T$ é a matriz de entrada do controle u, na primeira equação do sistema (1). O problema de controle consiste no fato de que em, dados $z_1 = (x_1, y_1)$ e um tempo $T > 0$, existe um controle u, tal que $z(T) = (x_1, y_1)$, satisfazendo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z'(t) & = & F(z,t,u) \\ z(0) & = & z_0 \end{array} \right. \tag{3}$$

O trabalho focou em assegurar a existência de tal controle. Nesse sentido, para dar sequência ao desenvolvimento e garantir ao sistema (3) um controle u, fez-se uso do Teorema do Controle Local. Desse modo, sejam (z_e, u_e) um ponto de equilíbrio e o sistema de controle linearizado em torno do ponto de equilíbrio (4):

[1]adriana.washington@grad.ufsc.br
[2]francis.cordova@ufsc.br

$$z' = \frac{\partial F}{\partial z}(z_e, u_e) \cdot z + \frac{\partial F}{\partial u}(z_e, u_e) \cdot u. \tag{4}$$

Tem-se que, se o sistema de controle linearizado (4) é controlável, então o sistema (3) será localmente controlável em torno do ponto de equilíbrio. Ou seja, $\exists \delta > 0; \forall |z_0 - z_e|_{\mathbb{R}^n} < \delta, |z_1 - z_e|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ e existe u, um controle, de modo que a solução de (3) satisfaz $z(T) = z_1$ [2, 3, 5]. Logo, os esforços concentram-se em garantir a controlabilidade do sistema linearizado.

Para este fim, consideramos o sistema linear (5):

$$\begin{cases} z'(t) & = & Az(t) + Bu(t), t \in [0, T] \\ z(0) & = & z_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{5}$$

em que, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $z(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m$. Faz-se o uso do Teorema de Kalman [4]. Ou seja, (5) é exatamente controlável no tempo $T > 0$ se, e somente se (6) é satisfeito.

$$rank[B\ AB\ A^2B\ \cdots A^{n-1}B] = n. \tag{6}$$

No sistema linearizado (4) em torno de um ponto de equilíbrio escolhido, mostraremos a satisfação da condição do Teorema de Kalman e em consequência a controlabilidade do sistema linearizado. Portanto, concluímos que o sistema não linear (1) é localmente controlável, em torno do ponto de equilíbrio escolhido.

Referências

[1] W. E. Boyce e R. C. DiPrima. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. ISBN: 9788521627357.

[2] Michael Branton. "Nonlinear Systems". Em: **ODE Architect Companion**. John Wiley Sons, Inc, 1999. Cap. 7, pp. 115–134.

[3] Jean-Michel Coron. **Control and nonlinearity**. 136. American Mathematical Soc., 2007.

[4] R. E. Kalman. "On the general theory of control systems". Em: **Proceedings First International Conference on Automatic Control**. 1960, pp. 481–492. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)70094-8.

[5] L. Perko. **Differential Equations and Dynamical Systems**. 3a. ed. Nova Iorque: Springer, 2001. ISBN: 978-1461265269.