

## Um estudo numérico entre equações diferenciais: fracionárias x inteiras

Matheus Tobias Mendonça<sup>1</sup>

UFJF, Juiz de Fora, MG

Sandro Rodrigues Mazorche<sup>2</sup>

Departamento de Matemática - UFJF, Juiz de Fora, MG

Neste trabalho apresentaremos um estudo sobre o modelo do oscilador harmônico com amortecimento em derivadas de ordem inteira, (EDO-( $p,q$ )), comparando com o modelo do oscilador harmônico com derivadas fracionárias, (EDF- $\alpha$ ). Em (1) podemos observar os modelos, onde a EDO-( $p,q$ ) pode ser visto em [3], em que as constantes  $p = \frac{b}{m}$  e  $q = \frac{k}{m}$ , sendo  $m$  a massa,  $b$  o fator de atrito e  $k$  a constante de elasticidade da mola e a EDF- $\alpha$  utilizando a derivada fracionária do tipo Caputo com  $1 < \alpha < 2$  e  $\omega^\alpha = \frac{k}{m}$ , pode ser visto em [2].

$$(EDO-(p,q)) \begin{cases} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \\ x(0) = x_0, x'(0) = x'_0 \end{cases} \quad ; \quad (EDF-\alpha) \begin{cases} \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + \omega^\alpha x(t) = 0 \\ x(0) = x_0, x'(0) = x'_0 \end{cases} \quad (1)$$

Para encontrarmos a solução do modelo fracionário, resolvemos nosso sistema aplicando a transformada de Laplace e assim a solução é dado pelas funções de Mittag-Leffler (2).

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{x(0)s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \omega^\alpha} + \frac{x'(0)s^{\alpha-2}}{s^\alpha + \omega^\alpha} \quad e \quad x(t) = x(0)E_{\alpha,1}(-\omega^\alpha t^\alpha) + x'(0)tE_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha) \quad . \quad (2)$$

Tomando  $x_1(t) = E_{\alpha,1}(-\omega^\alpha t^\alpha)$ ,  $x_2(t) = tE_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha)$  e como são linearmente independentes, podemos construir uma EDO linear de segunda ordem homogênea,  $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p(t)\frac{dx(t)}{dt} + q(t)x(t) = 0$ , onde  $x(t)$  é a sua solução e as funções  $p(t)$  e  $q(t)$  são dadas por  $p(t) = -\frac{W'(t)}{W(t)}$  e  $q(t) = \frac{W_2(t)}{W(t)}$ :

$$\begin{aligned} W(t) &= x_1x_2' - x_1'x_2 = [E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha)]^2 + \omega^\alpha t^\alpha E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha)E_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha) \quad ; \\ W'(t) &= x_1x_2'' - x_1''x_2 = \omega^\alpha t^{\alpha-1}[E_{\alpha,\alpha-1}(-\omega^\alpha t^\alpha)E_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha) - E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha)E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha)] \quad ; \\ W_2(t) &= x_1x_2'' - x_1''x_2 = \omega^\alpha t^{\alpha-2}[\omega^\alpha t^\alpha [E_{\alpha,\alpha}(-\omega^\alpha t^\alpha)]^2 + E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha)E_{\alpha,\alpha-1}(-\omega^\alpha t^\alpha)] \quad . \end{aligned}$$

Nossa proposta para os cálculos de ( $p, q$ ) constantes, é dada por:  $p = -\frac{\overline{W}'}{\overline{W}}$  e  $q = \frac{\overline{W}_2}{\overline{W}}$ .

$$\overline{W} = \int_0^\infty t^\alpha W(t) dt \quad ; \quad \overline{W}' = \int_0^\infty t^\alpha W'(t) dt \quad ; \quad \overline{W}_2 = \int_0^\infty t^\alpha W_2(t) dt \quad . \quad (3)$$

Desta forma temos que o oscilador harmônico fracionário EDF-( $\alpha$ ) tem um comportamento similar ao oscilador harmônico com amortecimento EDO-( $p, q$ ).

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p\frac{dx(t)}{dt} + qx(t) = 0 \quad \approx \quad \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} + \omega^\alpha x(t) = 0 \quad (4)$$

<sup>1</sup>tobias@ice.ufjf.br

<sup>2</sup>sandro.mazorche@ufjf.edu.br

Para os resultados numéricos foi programado uma rotina no Octave que utiliza o código em [1], permitindo assim compararmos as soluções das equações apresentadas em (4). Exibimos abaixo uma comparação para os seguintes parâmetros,  $\alpha = 1.92$ ,  $\omega^\alpha = 1$   $x_0 = 1$  e  $x'_0 = 1$ :

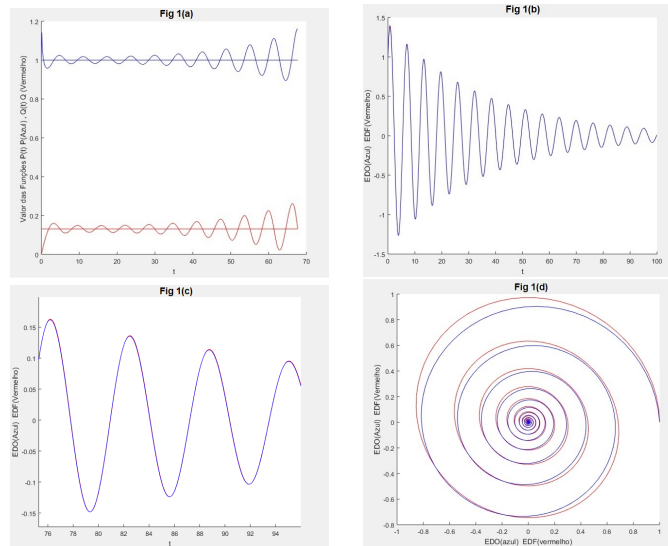


Figura 1: Gráficos gerados pelo Octave

Na Fig 1(a) temos as funções  $p(t)$  e  $q(t)$  oscilando em torno das constantes  $p = 0.12951$  e  $q = 1$  calculados pelas expressões em (3). Na Fig 1(b) podemos observar como as soluções do caso fracionário e ordem inteira são próximas, ficando mais evidente quando olhamos a Fig 1(c). Mas se observarmos na Fig 1(d) o plano de fase das soluções, percebemos que há diferença entre essas soluções que ocorre devido ao fato da função de Mittag-Leffler possuir um número finito de zeros e uma convergência assintótica a zero sem oscilações.

Os estudos numérico se mostraram promissores o que nos incentiva iniciarmos um estudo analítico desse processo onde buscaremos entender melhor esta relação entre os modelos fracionários e o de ordem inteira.

## Agradecimentos

Agradecemos à Pró-Reitoria de Pós-graduação e Pesquisa da Universidade Federal de Juiz de Fora, por conceder a bolsa PIBIC.

## Referências

- [1] R. Garrappa. **Numerical evaluation of two and three parameter Mittag-Leffler functions**. Italy: SIAM Journal of Numerical Analysis, 2015.
- [2] Edmundo Capelas De Oliveira R.Figueiredo Camargo. “Cálculo Fracionário”. Em: **Editora Livraria da Física** (2015).
- [3] Douglas B. Meade William E. Boyce Richard C. Diprima. “Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno”. Em: **LTC | Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.** (2020).