Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Resolução de problemas de otimização com restrições de igualdade e desigualdade utilizando a Inicialização Global Topográfica

Marroni de Sá Rêgo[1]
IFPA, Óbidos, PA
Janaína I. da Costa Rêgo[2]
IPRJ, Nova Friburgo, RJ
Luiz N. H. G. de Oliveira[3]
IPRJ, Nova Friburgo, RJ
Raimundo Augusto[4]
UFOPA, Santarém, PA

Resumo. Em geral, os métodos clássicos para resolver o problema de otimização com restrições de igualdade e desigualdade são conhecidos por sua eficiência. Entretanto, tais métodos dependem fortemente da localização dos pontos iniciais. Neste trabalho, utilizamos a Inicialização Global Topográfica para gerar bons pontos iniciais para o método de busca local utilizado na resolução de problemas restritos de minimização global. Para realizar as tarefas de busca local, usamos o Algoritmo de Direções Viáveis e Pontos Interiores (FDIPA). Em seguida, utilizamos quatro problemas descritos na literatura para avaliar a eficácia da metodologia apresentada. Os resultados indicaram que a presente abordagem é uma estratégia eficiente para encontrar as soluções globais de problemas de otimização com restrições mistas.

Palavras-chave. FDIPA, Otimização Restrita, Inicialização Topográfica

1 Introdução

Neste trabalho lidamos com o problema de encontrar as soluções do problema de otimização com restrições de igualdade e desigualdade. Tal problema pode ser expresso como,

$$\text{minimize } f(x) \text{ sujeito a } x \in D, \tag{1}$$

onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto de restrições dado por,

$$D = \{x \in S;\ g_i(x) \leq 0 \text{ e } h_j(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, l\}. \tag{2}$$

Aqui, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são por hipótese funções suaves e diferenciáveis, mas não necessariamente convexas [3]. O subconjunto S é um hipercubo definido por $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$, onde $[a_j, b_j]$ é o intervalo real no qual a variável x_j está definida e "$\times$" denota o produto cartesiano.

[1]marronidesa2@gmail.com
[2]janainaimbiriba@gmail.com
[3]neliohenderson@gmail.com
[4]raimundoaugusto.ufopa@gmail.com

Para resolver o problema (1) podem-se utilizar os métodos clássicos de otimização, como os métodos tipo Newton, que a cada iteração realizam uma busca local partindo de um determinado ponto inicial [6]. Devido as características locais da teoria matemática utilizada no desenvolvimento desses métodos, não é dada preferência às soluções globais de (1), sendo esta uma severa limitação ao uso direto de tais métodos para solução do problema (1). Tal dificuldade pode ser contornada utilizando pontos iniciais suficientemente próximos das soluções de (1). Entretanto, pontos iniciais apropriados sem sempre estão disponíveis na formulação dos problemas.

Por essa razão, recorreu-se ao uso da Inicialização Global Topográfica, proposta em [8]. Tal algoritmo de agrupamento, utiliza uma abordagem baseada em conceitos elementares da teoria dos grafos, a fim de gerar bons pontos de partida para os métodos de busca local, a partir de pontos distribuídos de modo uniforme no interior da região viável.

No presente trabalho, usamos a Inicialização Global Topográfica, para obter as estimativas iniciais adequadas para o método de busca local FDIPA (Algoritmo de Direções Viáveis e Pontos Interiores), utilizado aqui para encontrar as soluções globais do problema (1).

2 Algoritmo de Direções Viáveis e Pontos Interiores

O método FDIPA foi desenvolvido para resolver o problema de otimização descrito na Eq. (1) [3]. Como as restrições de igualdade devem estar ativas na solução, o FDIPA faz uso da função de penalidade ϕ, dada por,

$$\phi\left(x\right) = f\left(x\right) + \sum_{j=1}^{l} c_j \left|h_j\left(x\right)\right|, \tag{3}$$

onde $c_j > 0$, $j = 1, \ldots, l$. Neste caso, existe $c \in \mathbb{R}^l$ tal que o valor mínimo de ϕ sujeito apenas a restrições de desigualdade ocorre na solução do problema (1). No entanto, embora não existam parâmetros de penalidade indefinidamente crescentes, a função ϕ não possui derivadas em pontos onde as restrições de igualdade estão ativas [3].

Para superar essa limitação e permitir o uso da função de penalidade ϕ, as restrições de igualdade são redefinidas de forma que todas tenham o mesmo sinal (não positivo). Assim, o conjunto viável do problema assume a forma

$$\varOmega = \left\{x \in S;\ g_i\left(x\right) \leq 0 \text{ e } h_j\left(x\right) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, l\right\}, \tag{4}$$

onde o interior de $\varOmega$ é denotado por $\varOmega^0$. Aqui, assumimos que o conjunto viável Ω possui o interior não vazio. Além disso, por definição, tal conjunto é limitado e fechado, garantindo a existência de soluções do problema de minimização restrita, ver [5].

Sob certas hipóteses, Herskovitz demonstrou que dado um ponto $x_0 \in \varOmega^0$, o método FDIPA gera uma sequência de pontos $\{x_k\} \subset \varOmega^0$ tal que $\phi\left(x_{k+1}\right) < \phi\left(x_k\right)$ [3]. Esta sequência converge para um ponto que satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) do problema (1), dadas por,

$$\nabla f\left(x\right) + \nabla g\left(x\right)\lambda + \nabla h\left(x\right)\mu = 0, \tag{5}$$

$$G\left(x\right)\lambda = 0, \tag{6}$$

$$h_j\left(x\right) = 0,\ j = 1, \ldots, l, \tag{7}$$

$$g_i\left(y\right) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

$$\lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m, \tag{9}$$

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. v. 9, n. 1, 2022.

onde $G(x) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é uma matriz diagonal, com $G_{ii}(x) = g_i(x)$, para todo $i = 1, \ldots, m$, λ e μ são as variáveis duais associadas às restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente.

As equações (5)-(7) descrevem um sistema não linear em (x, λ, μ). Aplicando o método de Newton para resolver este sistema não linear, com o ponto inicial (x, λ, μ), obtemos $(d_\alpha, \lambda_\alpha, \mu_\alpha)$ que é solução do seguinte sistema linear,

$$\begin{bmatrix} B & \nabla g(x) & h(x) \\ \Lambda \nabla g^T(x) & G(x) & 0 \\ \nabla h^T(x) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_\alpha \\ \lambda_\alpha \\ \mu_\alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) \\ 0 \\ h(x) \end{bmatrix}, \tag{10}$$

onde $\Lambda \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é a matriz diagonal com $\Lambda_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, m$, e $B = H(x, \lambda, \mu)$, onde $H(x, \lambda, \mu)$ é a Hessiana da função Lagrangiana associada ao problema (1). No entanto, devido ao alto custo computacional para calcular $H(x, \lambda, \mu)$, podemos definir B como uma aproximação quasi-Newton de H ou a matriz identidade [3].

De acordo com [3], o vetor d_α é uma direção de descida para ϕ, mas pode não ser viável em relação a Ω. Para garantir a viabilidade da direção de busca, utiliza-se o vetor $d_\beta \in \mathbb{R}^n$ para desviar o vetor $d_\alpha \in \mathbb{R}^n$ para o interior da região viável. O vetor d_β é obtido resolvendo o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} B & \nabla g(x) & h(x) \\ \Lambda \nabla g^T(x) & G(x) & 0 \\ \nabla h^T(x) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_\beta \\ \lambda_\beta \\ \mu_\beta \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \Lambda \omega^g \\ \omega^h \end{bmatrix}, \tag{11}$$

onde $\omega^g > 0$ e $\omega^h > 0$ são fatores de deflexão associados a restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente.

Assim, a nova direção de busca é dada por,

$$d = d_\alpha + \rho d_\beta, \tag{12}$$

onde $\rho > 0$ é tal que, se $\nabla f(x)^T d_\beta > 0$, então

$$\rho < (\xi - 1) \frac{\nabla \phi^T(x)\, d_\alpha}{\nabla \phi^T(x)\, d_\beta}, \quad \xi \in (0, 1). \tag{13}$$

Note que a direção de busca d é computada em dois passos. Primeiramente, resolvemos o sistema linear (10) a fim de obter $(d_\alpha, \lambda_\alpha, \mu_\alpha)$. O segundo passo é resolver o sistema linear dado pela Eq. (11). Finalmente, a direção de busca deste método de pontos interiores é determinado pela combinação linear descrita na Eq. (12).

Obtida a direção de busca d, realiza-se uma busca linear inexata que obedece a condição de Armijo. Assim, o novo ponto é determinado por $\hat{x} = x + td$, onde t é o comprimento do passo. A matriz B (simétrica e definida positiva) é atualizada usando a fórmula de atualização quasi-Newton $BFGS$ com a modificação de Powell, ver [3].

3 Inicialização Global Topográfica

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto descrito na Eq. (4). O primeiro passo na Inicialização Global Topográfica consiste em gerar, de modo uniforme, $\overline{N}$ pontos no hipercubo S. Aqui, esse processo é feito usando uma sequência determinística com baixa discrepância, conhecida como sequência de Sobol, ver [7]. Observe que os pontos amostrais podem não ser todos viáveis, ou seja, apenas N pontos amostrais pertencem a Ω, $N \leq \overline{N}$.

Os N pontos amostrais viáveis são denotados por P_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Para cada ponto P_i, é construída uma lista de referência (uma lista de índices dos pontos). Isto é feito para organizar

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0297

os outros $(N - 1)$ pontos, através da chamada ordem do vizinho mais próximo. Assim, para P_i, o j-ésimo elemento desta lista é o ponto amostral j mais próximo de P_i. Essa lista é ainda complementada pela atribuição de um sinal para cada índice j, do seguinte modo:

$$j = \begin{cases} +j, \text{ se } f(P_j) \geqslant f(P_i) \\ -j, \text{ se } f(P_j) < f(P_i) \end{cases} \tag{14}$$

As N listas de referências constituem uma matriz $N \times (N - 1)$, que é chamada de matriz topográfica $(t - matriz)$ da função ϕ associada aos pontos de amostragem. A matriz topográfica pode ser interpretada por um grafo orientado, onde o sinal positivo representa a "ponta final" do arco e o sinal negativo a "ponta inicial" do arco. Este grafo associado é chamado de grafo topográfico (ou simplesmente topografo) de ϕ.

Dado um inteiro $1 \leqslant k \leqslant (N - 1)$, a submatriz $N \times k$ obtida considerando apenas os k vizinhos mais próximos é chamada de $k - t-$matriz, cujo grafo correspondente é o $k^+ - topografo$. Se a $i-$ésima linha da $k - t-$matriz é uma linha positiva, então o ponto amostral P_i é dito um minimizador local de ϕ no $k^+ - topografo$. Aqui, todos os minimizadores locais de ϕ no $k^+ - topografo$ são selecionados para a busca local.

Entretanto, de acordo com observações feitas por [8], uma vez que o número de minimizadores locais de ϕ no $k^+ - topografo$ aumenta conforme o valor de k decresce, este procedimento pode levar a um grande custo computacional no passo de busca local. Por esse motivo, o parâmetro k deve ser escolhido de forma adequada. Nesse contexto, em [2] foi proposta uma fórmula para o cálculo de k. Utilizando esta fórmula os autores obtiveram, na maioria dos seus experimentos, $k = 4$. Por esse motivo, no presente trabalho utilizamos apenas os 4 vizinhos mais próximos.

Para exemplificar o uso da Inicialização Global Topográfica, consideremos o seguinte problema: obtenha $x \in \Omega$, que minimiza a função

$$\phi(x) = 10(x_1 - 2)^2 + 0.1\left(x_2^2 - 1\right)^2 + cos^2(\pi x_2) + 100\left|x_1 + x_2 + x_2^2 - 5\right|, \tag{15}$$

onde

$$\Omega = \left\{x \in [-2,\ 2] \times [-2,\ 2]\,; g_1(x) = x_1 + x_2 + x_2^2 - 5 \leq 0 \text{ e } h_1(x) = x_1 x_2^2 - 2 \leq 0\right\}. \tag{16}$$

Esse problema possui duas soluções globais, a saber: $(2, 1)$ e $(2, -1)$. Assim, o objetivo é determinar tais minimizadores.

Utilizando a sequência de Sobol, foram gerados $\overline{N} = 10$ pontos amostrais na caixa $[-2,\ 2] \times [-2,\ 2]$. Verificando a viabilidade desses pontos, observa-se que o ponto $(1,5; 1,5)$ não é viável. Os $N = 9$ pontos restantes, denotados por P_i, $i = 1, ..., N$, pertencem a Ω e são descritos na Tabela 1 com os respectivos valores de ϕ.

Tabela 1: Pontos amostrais P_i com os respectivos valores de ϕ.

i	P_i	$f(P_i)$
1	(-2; -2)	1161,9
2	(0; 0)	241,1
3	(1; -1)	111
4	(-1; 1)	391
5	(-0,5; -0,5)	275,056
6	(0,5; -1,5)	110,156
7	(-1,5; 0,5)	360,056
8	(-1,25; -0,75)	376,457
9	(0,75; 1,25)	98,9691

Considerando apenas os $k = 4$ vizinhos mais próximos, a $4 - t - matriz$ é dada por,

$$4 - t - \text{matriz} = \begin{bmatrix} -8 & -5 & -6 & -7 \\ 5 & -3 & 4 & 8 \\ -6 & 2 & 5 & -9 \\ -7 & -2 & -5 & -8 \\ -2 & 8 & -6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 4 & 8 & -5 & -2 \\ -5 & -7 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \\ \leftarrow 4 \\ \leftarrow 5 \\ \leftarrow 6 \\ \leftarrow 7 \\ \leftarrow 8 \\ \leftarrow 9 \end{array}. \quad (17)$$

Note que na $4 - t - matriz$ apenas as linhas 6 e 9, correspondentes aos pontos P_6 e P_9, são positivas. Assim, os pontos P_6 e P_9 são os minimizadores locais de ϕ no $4^+ - topografo$ e devem ser selecionados como estimativas iniciais para o método de busca local FDIPA. Aqui, o método FDIPA equipado com a Inicialização Global Topográfica é denotado por TGO-FDIPA.

4 Resultados

Para avaliar a eficácia da metodologia aqui apresentada, utilizamos quatro exemplos descritos na literatura. Os problemas 1-3 foram retirados de [1] e [4], e o problema 4 é uma modificação do problema MCB6 descrito em [2]. Os resultados numéricos foram obtidos utilizando um computador equipado com o processador Intel® Core^{TM} i7-4510U, 8 GB de memória e sistema operacional Ubuntu 15.04. O código foi desenvolvido em linguagem C.

Problema 1:

$$\begin{cases} f(x) = 3x_1 + 0,000001x_1^3 + 2x_2 + (0,000002/3)x_2^3 \\ g_1(x) = -x_4 + x_3 - 0,55 \le 0, \\ g_2(x) = -x_3 + x_4 - 0,55 \le 0, \\ h_1(x) = 1000sen(-x_3 - 0,25) + 1000sen(-x_4 - 0,25) + 894,8 - x_1 = 0, \\ h_2(x) = 1000sen(x_3 - 0,25) + 1000sen(x_3 - x_4 - 0,25) + 894,8 - x_2 = 0, \\ h_3(x) = 1000sen(x_4 - 0,25) + 1000sen(x_4 - x_3 - 0,25) + 1294,8 = 0, \\ 0 \le x_1, x_2 \le 1200; -0,55 \le x_3, x_4 \le 0,55. \end{cases} \quad (18)$$

Problema 2:

$$\begin{cases} f(x) = -9x_5 - 15x_8 + 6x_1 + 16x_2 + 10(x_6 + x_7) \\ g_1(x) = x_9x_3 + 0,02x_6 - 0,025x_5 \le 0, \\ g_2(x) = x_9x_4 + 0,02x_7 - 0,015x_8 \le 0, \\ h_1(x) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ h_2(x) = 0,03x_1 + 0,01x_2 - x_9(x_3 + x_4) = 0, \\ h_3(x) = x_3 + x_6 - x_5 = 0, \\ h_4(x) = x_4 + x_7 - x_8 = 0, \\ 0 \le x_1, x_2, x_6 \le 300; 0 \le x_4, x_8 \le 200; \\ 0 \le x_3, x_5, x_7 \le 100; 0,01 \le x_9 \le 0,03. \end{cases} \quad (19)$$

Problema 3:

$$\begin{cases} f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ g_1(x) = 0,25x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ h_1(x) = x_1 - 2x_2 + 1 = 0, \\ -10 \le x_1, x_2 \le 10 \end{cases} \quad (20)$$

Problema 4:

$$\begin{cases} f(x) = \left(4 - 2,1x_1^2 + x_1^4/3\right) x_1^2 + x_1 x_2 + \left(4x_2^2 - 4\right) x_2^2 \\ g_1(x) = x_1 x_2^3 \leq 0, \\ g_2(x) = x_1^3 - x_2^2 \leq 0, \\ g_3(x) = x_1 + x_2^2 + 2x_2 - 3 \leq 0, \\ h_1(x) = 8x_1 - 8,4x_1^3 + 2x_1^5 + x_2 + x_3 x_2^3 + 3x_4 x_1^2 + x_5 = 0, \\ h_2(x) = x_1 - 8x_2 + 16x_2^3 + 3x_1 x_2^2 x_3 - 2x_2 x_4 + x_5 (2x_2 + 2) = 0, \\ h_3(x) = x_3 \left(x_1 x_2^3\right) = 0, \\ h_4(x) = x_4 \left(x_1^3 - x_2^2\right) = 0, \\ h_5(x) = x_5 \left(x_1 + x_2^2 + 2x_2 - 3\right) = 0, \\ -3 \leq x_1 \leq 3; -2 \leq x_2 \leq 2; 0 \leq x_3, x_4, x_5 \leq 5. \end{cases} \tag{21}$$

Na Tabela 2, são apresentadas as soluções obtidas utilizando o TGO-FDIPA. Para cada problema teste, apresentamos os minimizadores globais (denotados por x^*) com os respectivos valores da função de penalidade ϕ (denotados por ϕ^*), o número de pontos amostrais gerados (indicado por $\overline{N}$) e o número de estimativas iniciais (denotado por N_0).

Tabela 2: Soluções obtidas para os problemas 1-4 utilizando a metodologia aqui apresentada.

Problema	$\overline{N}$	N_0	x^*	ϕ^*
1	10000	1	(679,953; 1026,06; 0,118871; -0,396236)	$5126,5$
2	30000	2	(0; 100; 0; 100; 0; 0; 100; 200; 0,01)	-400
3	1500	1	(0,822867; 0,91144)	$1,39479$
4	1500	19	(0,089842; -0,712656; 0; 0; 0)	-1.03163
			(-0,089842; 0,712656; 0; 0; 0)	

Observe que quanto mais rígidas as restrições de desigualdade, maior o valor de N de forma a obter pontos no interior da região viável. Por esse motivo, apesar do problema 4 apresentar mais restrições que o problema 1, o número $\overline{N}$ é menor.

Na Tabela 3 são apresentados os números de avaliações (NAF) da função ϕ necessárias para determinar as soluções de cada problema utilizando a metodologia aqui apresentada. Também é mostrado o tempo em segundos (t^*) necessário para obter tais soluções. Para os problemas 1 e 2, são apresentados os números médios de avaliações da função ϕ feitas por quatro métodos descritos em [1], a saber: DE-CC que é uma combinação dos métodos DE (Differential Evolution) e CC (Constraint Consensus), os métodos híbridos DE-DB e DE-FD, onde DB (Direction Based maximum) e FD (Feasibility Distance far) são variações de CC, e o método MCC-CV que é uma variação do método CC utilizando SQP (Sequential Quadratic Programming).

Tabela 3: Tempo e o número de avaliações da função de mérito necessários para obter as soluções descritas na Tabela 2.

Problema	t^*	NAF	NAF_{DE-CC}	NAF_{DE-DB}	NAF_{DE-FD}	NAF_{MCC-CV}
1	0,022	2338	42100	42420,83	42312,5	24612
2	0,162	5985	240000	240000	239875	151080
3	0,009	49	-	-	-	-
4	0,051	3074	-	-	-	-

Observe que nos problemas 1 e 2 temos $NAF < NAF_{DE-CC}$, $NAF < NAF_{DE-DB}$, $NAF < NAF_{DE-FD}$ e $NAF < NAF_{MCC-CV}$, indicando que o TGO-FDIPA foi mais efetivo na busca das soluções desses problemas.

5 Considerações Finais

No presente trabalho, testamos a eficácia da Inicialização Global Topográfica na geração de pontos iniciais adequados para os métodos de busca local, empregados na resolução de problemas de otimização com restrições de igualdade e desigualdade. Aqui, a busca local foi realizada usando o Algoritmo de Direções Viáveis e Pontos Interiores (FDIPA).

Experimentos computacionais foram realizados usando quatro problemas de teste previamente estudados na literatura, com o objetivo de verificar se a metodologia aqui apresentada é capaz de obter as soluções dos problemas. Foram também comparados os números de avaliações da função de mérito necessários para solucionar cada teste, utilizando diferentes métodos. Os resultados obtidos mostram que TGO-FDIPA é uma ferramenta numérica eficiente na busca das soluções globais do problema de otimização com restrições mistas.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Os autores também agradecem o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro - FAPERJ e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq.

Referências

[1] N.M. Hamza, R.A. Sarker e D.L. Essam. "Differential evolution with multi-constraint consensus methods for constrained optimization". Em: **Journal of Global Optimization** 57 (2013), pp. 583–611. DOI: 10.1007/s10898-012-9987-z.

[2] N. Henderson et al. "A new look at the topographical global optimization method and its application to the phase stability analysis of mixtures". Em: **Chemical Engineering Science** 127 (2015), pp. 151–174. DOI: 10.1016/j.ces.2015.01.029.

[3] J. Herskovits. "Feasible Direction Interior-Point Technique for Nonlinear Optimization". Em: **Journal of Optimization Theory and Applications** 99 (1998), pp. 121–146. DOI: 10.1023/A:1021752227797.

[4] W. Hock e K. Schittkowski. **Test Examples for Nonlinear Programming Codes.** 1a. ed. New York: Springer, 1981. ISBN: 9783642483202.

[5] A. Ismailov e M. V. Solodov. **Otimização: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade.** 4a. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. ISBN: 9786599052804.

[6] J. Nocedal e S.J. Wright. **Numerical Optimization.** 2a. ed. New York: Springer, 2006. ISBN: 9780387400655.

[7] I. M. Sobol. "On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals". Em: **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics** 7 (1967), pp. 86–112. DOI: 10.1016/0041-5553(67)90144-9.

[8] A. Törn e S.V Viitanen. "Topographical global optimization". Em: **Recent Advances in Global Optimization**. Ed. por C.A Floudas e P.M. Pardalos. Vol. 176. Princeton University Press, 1992. Cap. 19, pp. 384–398. DOI: 10.1515/9781400862528.

