Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Números Irracionais na Educação Básica: uma abordagem computacional

Teodora Pinheiro Figueroa[1]
UTFPR, Pato Branco, PR

Resumo. Este trabalho se refere a um recorte de um projeto de pesquisa que tem como foco o desenvolvimento de situações didáticas sobre a temática "Números Irracionais"na Educação Básica. Apresentamos uma situação didática a respeito de uma abordagem computacional para a aproximação da raiz quadrada de dois, tendo como pano de fundo a Iteração do Ponto Fixo. A situação didática foi aplicada na disciplina de Didática da Matemática, para os alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Pato Branco. A aplicação da situação didática, as discussões e os resultados foram satisfatórios, os quais são relatados em detalhes neste trabalho.

Palavras-chave. Números Irracionais, Educação Básica, Didática da Matemática, Abordagem Computacional, Iteração do Ponto Fixo

1 Introdução

Números irracionais é um tema em destaque das pesquisas na área de educação matemática, no que diz respeito a aspectos relacionados ao conhecimento dos professores e, que impactam diretamente no processo de transposição didática deste saber a ser ensinado ([3]; [7]).

Segundo Chevallard e Johsua:

> “Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O ‘trabalho’que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.” ([6], p.39)

Neste trabalho, a discussão está associada ao que é dito de transposição didática interna, ou seja, o processo de transposição do saber que é realizado pelo professor ao planejar a sua aula. Neste caso, podemos considerar dois aspectos que influenciam neste processo: a relação do professor com este objeto e as obras consultadas (livros didáticos, materiais presentes nas mídias, como a internet). As pesquisas têm revelado que a organização didática dos livros didáticos pode causar obstáculos na aprendizagem dos alunos a respeito do conceito de números irracionais [3]. Além disso, dados de pesquisas apontam que os alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática apresentam dificuldades de ordem conceitual a respeito dos números irracionais [7].

Sendo assim, nota-se a importância da discussão em cursos de formação de professores sobre alguns conceitos imprescindíveis à compreensão dos números irracionais e o entendimento de que estes números são números reais e, possuem a sua localização na reta numérica ou reta real. Estes conceitos são: relação entre frações e suas representações decimais, dízimas periódicas, aproximação, infinito e incerteza.

[1]teodora.pinheiro@gmail.com

 © 2022 SBMAC

Diante desta realidade que impacta diretamente no ensino aprendizagem dos alunos na Educação Básica e, das diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) ([2], p.266) a respeito da importância do pensamento computacional, este trabalho visa contribuir com as pesquisas sobre a temática "Números Irracionais", a partir de uma proposta, que faz parte de um projeto de pesquisa que tem como objetivo o desenvolvimento de situações didáticas referentes a este tema.

Sendo assim, será apresentado neste trabalho apenas um recorte do projeto, através de uma situação didática planejada e aplicada na disciplina de Didática da Matemática, aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Pato Branco. A situação didática envolve conceitos de aproximação, representação infinita de um número irracional a partir de uma abordagem computacional para aproximações da raiz quadrada de dois, a qual pode ser implementada usando o Excel, ou outro recurso computacional, tendo como pano de fundo a Iteração do Ponto Fixo.

2 Números Irracionais

Os números Irracionais foram uma das descobertas dos matemáticos gregos, no que se caracteriza como a crise dos incomensuráveis ([10], p.124) Mas, apenas no século XIX, com a contribuição de Weierstrass, Dedekind e Cantor, que a teoria rigorosa do número irracional foi estabelecida. Durante este tempo na história ficaram implícitos as dificuldades formais e, obstáculos intuitivos, que mesmo com o processo de transposição do saber sábio para o saber a ser ensinado nos livros didáticos, ainda são atuais. Segundo Ripoll nos livros didáticos os números irracionais são caracterizados da seguinte forma:

> (a)Um número é irracional se não puder ser escrito na forma a/b com $a, b \in Z$ e b não-nulo ou Irracional é o número que não pode ser escrito na forma de fração; (b) Irracional é o número cuja representação decimal é infinita e não-periódica ou Todo número escrito na forma de um decimal infinito não-periódico é um número irracional; (c) Os números irracionais positivos representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade.([9], p.1)

Neste tipo de caracterização dos números irracionais e/ou definição existem diversos tipos de obstáculos à aprendizagem dos alunos que [8] e [9] comentam com riqueza de detalhes em seus trabalhos. Sendo assim, escolhemos explorar o que se refere a representação infinita deste tipo de número, que é algo extremamente abstrato para o aluno da Educação Básica. Por isso, desenvolvemos uma situação didática sobre este fato para discussão com os alunos do curso de Licenciatura em Matemática, futuros professores da Educação Básica.

3 Pensamento Computacional

O Pensamento Computacional segundo [1] surgiu na literatura nos trabalhos de Papert com a linguagem Logo, o qual concebe o computador como um recurso que estende as capacidades da mente humana para "forjar ideias", permitindo que as pessoas analisem, modelem e resolvam problemas com mais eficiência e fazendo uso de mais e melhores recursos.

Segundo a BNCC, o Pensamento Computacional é uma habilidade e competência que precisa ser desenvolvida desde o ensino fundamental e, que

> envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos; ([2], p.474)

 © 2022 SBMAC

> Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. ([2], p.528)

Dessa forma, esta proposta se insere neste contexto de forma a contribuir para que os alunos do curso de Licenciatura compreendam e desenvolvam este pensamento computacional através da Álgebra para a aproximação da raiz quadrada de dois, tendo como pano de fundo a Iteração do Ponto Fixo e, uma vez desenvolvido o algoritmo, o mesmo poderá ser implementado em uma planilha eletrônica, como por exemplo o Excel.

4 Iteração do Ponto Fixo

Um número p é um ponto fixo de uma dada função g se $g(p) = p$.

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e ϵ um número pertencente a este intervalo tal que $f(\epsilon) = 0$.

Utilizando cálculos algébricos pode-se transformar $f(x) = 0$ em $x = F(x)$, onde $F(x)$ é uma função de iteração.

Seja x_0 a primeira aproximação da raiz ϵ, calcula-pse $F(x_0)$.Então:

$x_1 = F(x_0)$; $x_2 = F(x_1)$; $x_3 = F(x_2)$ e, assim sucessivamente, ou seja,

$$x_{i+1} = F(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots. \tag{1}$$

Se a sequência $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ é convergente, isto é, se existe o

$$\lim_{i\to\infty} x_i = \epsilon$$

e $F(x)$ é contínua, então, passando ao limite a equação (1), tem-se:

$$\lim_{i\to\infty} x_{i+1} = F(\lim_{i\to\infty} x_i)$$

$$\epsilon = F(\epsilon)$$

onde ϵ é uma raiz de $f(x) = 0$

5 Situação didática - Aproximação da $\sqrt{2}$

A situação didática 1 (SD 1) desenvolvida aborda conhecimentos do nono ano do ensino fundamental, segundo [2].

SD 1: Seja $\theta = \sqrt{2}$. Sem usar a calculadora, dê uma aproximação para $\sqrt{2}$.

Essa situação foi aplicada a uma turma de alunos do curso de Licenciatura em Matemática e, em um primeiro momento, a maioria deles conceituaram um número irracional como um número que não apresenta uma dízima periódica e, outros se recordaram de aproximações para a $\sqrt{2}$ como apresentado no livro didático, Figura 1.

 © 2022 SBMAC

1 O número 2 está entre os quadrados perfeitos 1 e 4, pois $1 = 1^2$ e $4 = 2^2$. Fazemos tentativas:

$(1{,}1)^2 = 1{,}21 \longrightarrow 1{,}21 < 2$

$(1{,}2)^2 = 1{,}44 \longrightarrow 1{,}44 < 2$

$(1{,}3)^2 = 1{,}69 \longrightarrow 1{,}69 < 2$

$(1{,}4)^2 = 1{,}96 \longrightarrow 1{,}96 < 2$

$(1{,}5)^2 = 2{,}25 \longrightarrow 2{,}25 > 2$

Observamos, portanto, que $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5. Continuando o cálculo, temos:

$(1{,}41)^2 = 1{,}9881 \longrightarrow 1{,}9881 < 2$

$(1{,}42)^2 = 2{,}0164 \longrightarrow 2{,}0164 > 2$

Então, $\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42. Prosseguindo com o cálculo temos:

$(1{,}411)^2 = 1{,}990921 \longrightarrow 1{,}990921 < 2$

$(1{,}412)^2 = 1{,}993744 \longrightarrow 1{,}993744 < 2$

$(1{,}413)^2 = 1{,}996569 \longrightarrow 1{,}996569 < 2$

$(1{,}414)^2 = 1{,}999396 \longrightarrow 1{,}999396 < 2$

$(1{,}415)^2 = 2{,}002225 \longrightarrow 2{,}002225 > 2$

Desse modo, verificamos que $\sqrt{2}$ está entre 1,414 e 1,415. Então, podemos considerar que um valor aproximado para $\sqrt{2}$ é 1,414.

Figura 1: Aproximação da $\sqrt{2}$. Fonte: [4], p.17.

No segundo momento discutimos sobre este tipo de aproximação da Figura 1. Este tipo de aproximação leva o aluno a entender quando um número é irracional, especificamente, no que se refere a sua representação decimal?

Houve um consenso entre a turma de alunos que este tipo de aproximação pode gerar obstáculos no aprendizado do aluno, pois a aproximação da $\sqrt{2}$ gera uma sequência de valores com infinitos dígitos na representação decimal e, somente assim podemos de fato observar que este número é um número com representação decimal infinita e, não periódica. Ao truncar esta aproximação para $\sqrt{2} \approx 1,414$, este número deixa de ser um número irracional e, passa a ser um número racional.

Logo, este procedimento apresentado no livro didático [4] (Figura 1), segundo [3] se refere a obter uma aproximação racional de um número irracional.

Este fato pode ser uma das razões que explicam por que os alunos ao ingressarem no ensino superior apresentam dificuldades de conceituar um número irracional, ou melhor de estabelecer as diferenças entre o conceito de um número racional e irracional.

De forma a contribuir com essas questões referentes a organização didática deste conceito, foi proposto aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática uma nova abordagem para a aproximação da $\sqrt{2}$ tendo como pano de fundo a Iteração do Ponto Fixo.

Podemos escrever:

$$\theta^2 = 2$$

para $\theta > 0$

$$\theta^2 = 1 + 1$$

$$\theta^2 - 1 = 1$$

$$(\theta - 1)(\theta + 1) = 1$$

$$\theta - 1 = \frac{1}{\theta + 1}$$

$$\theta = 1 + \frac{1}{\theta + 1} \tag{2}$$

A partir desta fórmula de recorrência, foi proposto aos alunos realizarem as aproximações partindo de $\theta = 1$ e, além disso, os alunos foram incentivados ao desenvolvimento da habilidade do pensamento computacional de forma a procurar descrever passo a passo o processo para estas aproximações, de modo, a tentar explicitar este pensamento computacional na fórmula de recorrência obtida, Equação 2.

Sendo assim, depois de várias discussões, pois os alunos não estavam acostumados ao desenvolvimento da habilidade do pensamento computacional, obteve-se o seguinte:

$$\theta_{i+1} = 1 + \frac{1}{\theta_i + 1}. \tag{3}$$

$i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ para $\theta_0 = 1$

No terceiro momento os cálculos foram realizados à lápis e papel e, depois no quarto momento foi proposto aos alunos realizarem este cálculo utilizando o Excel.

Alguns alunos não sabiam usar planilhas eletrônicas, como o Excel e, este foi um momento muito importante para o aprendizado e, que poderá contribuir para a atuação profissional desses alunos em sala de aula com os seus alunos.

Acredita-se que este tipo de aproximação não deixa dúvidas aos alunos sobre a representação decimal infinita não periódica de um número irracional.

Apesar de ser uma aula de Didática da Matemática, foram estudados e discutidos os aspectos que se referem a Iteração do Ponto Fixo e o estudo na perspectiva da Análise Numérica, pois entende-se que estas discussões contribuem para o conhecimento de matemática do professor que vai ensinar matemática, enriquecendo o seu equipamento praxeológico. Ao que se refere equipamento praxeológico, segundo [5], trata-se do conjunto de praxeologias que uma pessoa X tem em relação a um objeto de conhecimento e, que ficam explícitos em seus registros referente à técnica (modo de resolver uma atividade e/ou tipo de tarefa), à tecnologia (argumento que justifica este modo de fazer/resolver a tarefa) e a teoria que justifica a tecnologia. Entende- se que ampliar este equipamento praxeológico traz importantes contribuições para a formação do professor e, que enriquecerá a sua prática docente.

Além disso, as discussões também ocorreram na perspectiva da utilização da Iteração do Ponto Fixo e, o que diz respeito a uma melhor compreensão sobre a natureza dos números irracionais. Pode-se dizer que a partir do desenvolvimento da situação didática proposta, a utilização da Iteração do Ponto Fixo proporcionou aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, uma relação de maior estreitamento com o saber em jogo, no caso o conceito de número irracional, o qual envolveu não apenas um conceito definido pelo professor, mas o fazer matematicamente a partir do Pensamento Computacional, tendo como pano de fundo a Iteração do Ponto Fixo.

6 Considerações Finais

Os resultados foram satisfatórios e, revelaram a importância da continuidade do projeto no sentido de planejamento e aplicação de situações didáticas de forma a contribuir para o conhecimento dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, com vistas às orientações dos documentos balizadores da Educação Básica.

Concluiu-se que é imprescindível a discussão a respeito do que as pesquisas acadêmicas na área de ensino de Matemática trazem sobre os obstáculos à aprendizagem dos alunos. E, assim

 © 2022 SBMAC

refletir/analisar e implementar novas situações didáticas evidenciando a importância do desenvolvimento do pensamento computacional nos cálculos matemáticos.

Acredita-se que esta abordagem computacional da aproximação da raiz quadrada de dois, ampliou o equipamento praxeológico dos alunos e, pode contribuir para que os mesmos implementem novas situações didáticas na perspectiva da abordagem computacional.

Referências

[1] L.L.S. Barbosa. "A inserção do Pensamento Computacional na Base Nacional Comum Curricular: reflexões acerca das implicações para a formação inicial dos professores de matemática". Em: 2019, pp. 889–898. DOI: `10.5753/cbie.wie.2019.889`.

[2] Brasil. **Base Nacional Comum Curricular**. Online. Acessado em 31/03/2022, `http://http://basenacionalcomum.mec.gov.br/`.

[3] G.C. Broetto e V.M.P.S. Wagner. "O Ensino de Números Irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso?" Em: **Bolema** 64 (2019), pp. 728–747. DOI: `https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a14`.

[4] B. Castrucci e J.R. Giovanni Júnior. **A conquista da Matemática: 9^0*ano***. 4a. ed. São Paulo: FTD, 2018. ISBN: 978859601920-0.

[5] Y. Chevallard. "Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique". Em: **Sociedad, Escuela y Matemáticas. Jaén: Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén**. Ed. por L. Ruiz-Higueras, A. Estepa e F. J. Garcia. 2007, pp. 705–746.

[6] Y Chevallard e M.A. Johsua. **La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné**. França: La Pensee Sauvage, 1991. ISBN: 2859190783.

[7] B. Ç. Ergene e Ö Ergene. "Repeating decimals and irrational numbers on the number line: through the lens of pre-service and in-service mathematics teachers". Em: **Acta Didactica Napocensia** 13 (2020), pp. 215–232. DOI: `https://doi.org/10.24193/adn.13.2.15`.

[8] W.M. Pommer. "A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais". Dissertação de mestrado. USP, 2012.

[9] C. C. Ripoll. "A construção dos números reais nos ensinos fundamental e médio". Em: **Textos da II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**. 2004, pp. 1–23.

[10] T. Roque. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. ISBN: 9788537808887.

DOI: 10.5540/03.2022.009.01.0280 © 2022 SBMAC