Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

# Polinômios Para-ortogonais Associados aos Polinômios de Szegő com Coeficientes de Verblunsky Constantes*

**A. Sri Ranga**
Dep. de Matemática Aplicada, IBILCE, UNESP
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: ranga@ibilce.unesp.br

**Marisa S. Costa**
Faculdade de Matemática, UFU
38408-100, Uberlândia, MG
marisa@famat.ufu.br

**Regina L. Lamblém**
UEMS - Univ. Estadual de Mato Grosso do Sul
79540-000, Cassilândia, MS
E-mail: lamblem@uems.br

**Resumo:** *Neste trabalho, consideramos os polinômios para-ortogonais associados aos polinômios de Szegő cujos coeficientes de Verblunsky são constantes e iguais a um parâmetro* $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 < |\alpha| < 1$. *O principal objetivo é mostrar que esses polinômios podem ser obtidos através de uma relação de recorrência cujos coeficientes dependem apenas do valor* $\alpha$.

**Palavras-chave:** *Polinômios de Szegő, Polinômios para-ortogonais, Coeficientes de Verblunsky*

## 1 Introdução

Os polinômios ortogonais no círculo unitário são conhecidos como polinômios de Szegő em homenagem a Gábor Szegő, que os introduziu no início do século 20. Desde então, esses polinômios têm sido estudados por muitos pesquisadores devido à sua aplicabilidade em diversas áreas, como regras de quadratura, processamento de sinais, teoria espectral, e muitas outras (ver, por exemplo, [6], [7]).

Dada uma medida positiva $\mu(\zeta) = \mu(e^{i\theta})$ no círculo unitário $\mathcal{C} = \{\zeta = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, a sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{S_n\}$ a ela associada é definida por

$$\int_{\mathcal{C}} \bar{\zeta}^j \, S_n(\zeta) \, d\mu(\zeta) = \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} \, S_n(e^{i\theta}) \, d\mu(e^{i\theta}) = 0, \;\; 0 \leq j \leq n-1, \;\; n \geq 1.$$

Denotando $\kappa_n^{-2} = ||S_n||^2 = \int_{\mathcal{C}} |S_n(\zeta)|^2 \, d\mu(\zeta)$, os polinômios ortonormais no círculo unitário são dados por $s_n(z) = \kappa_n \, S_n(z)$, $n \geq 0$.

Os polinômios de Szegő mônicos satisfazem o par de relações de recorrência

$$\begin{aligned} S_n(z) &= z \, S_{n-1}(z) - \overline{\alpha_{n-1}} S_{n-1}^*(z), \\ S_n(z) &= (1 - |\alpha_{n-1}|^2) \, z S_{n-1}(z) - \overline{\alpha_{n-1}} S_n^*(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \tag{1}$$

onde $\overline{\alpha_{n-1}} = -S_n(0)$ e $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/\bar{z})}$. Os números $\alpha_n$ são conhecidos como coeficientes de Szegő, de reflexão ou, ainda, coeficientes de Verblunsky e satisfazem

$$|\alpha_n| < 1 \;\text{ e }\; \mu_0 \prod_{k=0}^{n} (1 - |a_k|^2) = \kappa_n^{-2} = \frac{D_{n+1}}{D_n}, \;\; n \geq 1,$$

*Este trabalho tem o apoio do CNPq

 

onde os determinantes de Toeplitz $D_n$ são dados por

$$D_0 = \mu_0 \ \text{ e } \ D_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

Os momentos $\mu_n$, definidos por $\mu_n = \int_{\mathcal{C}} \zeta^{-n}\, d\mu(\zeta)$, satisfazem $\mu_{-n} = \overline{\mu_n}$, $n \geq 0$.

Um dos resultados mais conhecidos sobre polinômios de Szegő é que eles são completamente caracterizados pela sequência de coeficientes $\{\alpha_n\}$ a eles associada, como é dado no teorema a seguir, conhecido inicialmente como Teorema de Favard no círculo unitário, mas que recentemente vem sendo referido como Teorema de Verblunsky (ver, por exemplo, Simon [5]).

**Teorema 1.1.** *Para toda sequência de números complexos $\{\alpha_n\}$, com $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$, existe uma única medida positiva $\mu$ no círculo unitário associada tal que os polinômios $\{S_n\}$ gerados por (1) são os respectivos polinômios de Szegő mônicos.*

Um caso especial dos polinômios de Szegő, que estudamos neste trabalho, são os polinômios de Gerônimus $\{S_n(z)\}$, cujos coeficientes de Verblunsky satisfazem $\alpha_n = \alpha$, para todo $n \geq 1$, com $0 < |\alpha| < 1$. Esses polinômios são bastante conhecidos na literatura (ver, por exemplo [5]).

Uma sequência $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ é chamada de sequência encadeada se existe uma outra sequência $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \ \ 0 \leq g_0 < 1, \ \ 0 < g_n < 1, \quad n \geq 1; \\ &\text{(ii)} \ \ d_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{3}$$

A sequência $\{g_n\}$ é chamada de sequência de parâmetros da sequência encadeada $\{d_n\}$. Em geral, a sequência de parâmetros de uma sequência encadeada não é única. Toda sequência encadeada possui uma sequência de parâmetros minimal $\{m_n\}$ caracterizada pela condição $m_0 = 0$. Uma sequência $\{M_n\}$ é chamada sequência de parâmetros maximal de $\{d_n\}$ se satisfaz a seguinte condição: se $g_0 > M_0$, então a sequência $\{g_n\}$ gerada por (ii) de (3) não satisfaz o item (i) de (3).

Para mais informações a respeito de sequências encadeadas, ver Chihara [1].

A seguir, consideremos $\mu$ uma medida de probabilidade definida no círculo unitário e seja $\{S_n(z)\}$ a sequência de polinômios de Szegő mônicos a ela associada. Seja $\{\alpha_n\}$ a sequência dos coeficientes de Verblunsky que geram $\{S_n(z)\}$ e, para $w \in \mathcal{C}$, definimos os coeficientes

$$\tau_n(w) = \frac{S_n(w)}{S_n^*(w)}, \ \ n \geq 0,$$

que têm um importante papel neste trabalho.

De acordo com a fórmula de Cristoffel-Darboux (ver, por exemplo, [5], Teorema 2.2.7),

$$K_n(z,w) = \sum_{j=0}^{n} \overline{s_j(w)}\, s_j(z) = \frac{\overline{s_{n+1}^*(w)} s_{n+1}^*(z) - \overline{s_{n+1}(w)} s_{n+1}(z)}{1 - \bar{w}z},$$

em que $s_n(z) = \kappa_n S_n(z)$ são os polinômios de Szegő ortonormais.

A função $K_n(z,w)$ é conhecida como núcleo reprodutor associado à medida $\mu$, pois

$$q_n(z) = \int_{\mathcal{C}} q_n(\zeta)\, K_n(z,\zeta)\, d\mu(\zeta),$$

para todo polinômio $q_n$ de grau no máximo $n$.

Consideremos $\{P_n(w;z)\}$ a sequência de polinômios em $z$ dada por

$$P_n(w;z) = \frac{\kappa_{n+1}^{-2}\bar{w}}{\overline{S_{n+1}(w)}} \frac{K_n(z,w)}{1+\tau_{n+1}(w)\alpha_n}, \quad n \geq 0.$$

Podemos mostrar facilmente que $P_n(w;z)$ é um polinômio de grau $n$ que pode também ser escrito como

$$P_n(w;z) = \frac{1}{z-w} \frac{S_{n+1}(z) - \tau_{n+1}(w)S_{n+1}^*(z)}{1+\tau_{n+1}(w)\alpha_n}, \quad n \geq 0.$$

Como $|w| = 1$, temos que $|\tau_n(w)| = 1$, para todo $n \geq 0$. Assim, o polinômio $\tilde{P}_{n+1}(w;z) = S_{n+1}(z) - \tau_{n+1}(w)S_{n+1}^*(z)$ é conhecido como polinômio para-ortogonal associado ao polinômio de Szegő $S_{n+1}(z)$. Pelas propriedades dos polinômios para-ortogonais já conhecidas (ver, por exemplo, [4]), segue que $\tilde{P}_{n+1}(w;z)$ tem todos os seus $n+1$ zeros simples e pertencentes ao círculo unitário $|z| = 1$. Em particular, $w$ é uma das raízes de $\tilde{P}_{n+1}(w;z)$. Consequentemente, os polinômios $P_n(w;z)$ têm todos os seus $n$ zeros no círculo unitário $|z| = 1$. No entanto, nenhum dos zeros de $P_n(w;z)$ é igual a $w$.

Em um trabalho recente (ver [2]), mostramos que os polinômios $P_n(w;z)$ satisfazem a relação de recorrência de três termos apresentada no teorema a seguir.

**Teorema 1.2.** *A sequência de polinômios mônicos $\{P_n(w;z)\}$ satisfaz a relação de recorrência de três termos*

$$P_{n+1}(w;z) = [z + b_{n+1}(w)]\, P_n(w;z) - a_{n+1}(w)zP_{n-1}(w;z), \quad n \geq 1,$$

*com $P_0(z;w) = 1$ e $P_1(w;z) = z + b_1(w)$, em que*

$$b_n(w) = \frac{\tau_n(w)}{\tau_{n-1}(w)} \;\; e \;\; a_{n+1}(w) = [1 + \tau_n(w)\alpha_{n-1}][1 - \overline{w\tau_n(w)\alpha_n}]w, \quad n \geq 1. \tag{4}$$

A partir de agora, trabalhamos com o caso particular $w = 1$ e denotamos $\tau_n(1)$ simplesmente por $\tau_n$. Por simplicidade, denotamos também os polinômios $P_n(1;z)$ por $P_n(z)$.

Seja $F_n$ um polinômio de grau $n$ definido por $F_0(z) = P_0(z)$ e

$$F_n(z) = \frac{\Pi_{j=0}^{n-1}[1 - \tau_j\alpha_j]}{\Pi_{j=0}^{n-1}[1 - \mathcal{R}e(\tau_j\alpha_j)]}\, P_n(z), \quad n \geq 1. \tag{5}$$

Um importante resultado apresentado em [2] é que a sequência de polinômios $\{F_n(z)\}$ satisfaz uma relação de recorrência de três termos do tipo

$$F_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]\, F_n(z) - 4d_{n+1}zF_{n-1}(z), \tag{6}$$

com $F_0(z) = 1$ e $F_1(z) = (1 + ic_1) + (1 - ic_1)$, onde

$$c_n = \frac{-\mathcal{I}m(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})}$$

e

$$d_{n+1} = \frac{1}{4}\frac{[1 - |\tau_{n-1}\alpha_{n-1}|^2]|1 - \tau_n\alpha_n|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_{n-1}\alpha_{n-1})][1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)]}, \quad n \geq 1.$$

Além disso, $\{c_n\}$ é uma sequência real e $\{d_n\}$ é uma sequência encadeada positiva com $d_{n+1} = d_{1,n} = (1 - g_{1,n-1})g_{1,n}$, onde a sequência de parâmetros $\{g_n\}$ é dada por

$$0 < g_{1,n} = \frac{1}{2}\frac{|1 - \tau_n\alpha_n|^2}{[1 - \mathcal{R}e(\tau_n\alpha_n)]} < 1, \quad n \geq 1.$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0036

## 2 Polinômios de Szegő com coeficientes de Verblunsky constantes

Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, com $0 < |\alpha| < 1$, e consideremos uma relação de recorrência do tipo

$$G_{n+1}(z) = (z+1)G_n(z) - (1-|\alpha|^2)\, z\, G_{n-1}(z), \quad n \geq 1. \tag{7}$$

Se $w_1$ e $w_2$ são as raízes da equação característica

$$w^2 - (z+1)w + (1-|\alpha|^2)\, z = 0,$$

então

$$w_1 = \frac{(z+1) + \sqrt{(z-1)^2 + 4|\alpha|^2 z}}{2}, \quad w_2 = \frac{(z+1) - \sqrt{(z-1)^2 + 4|\alpha|^2 z}}{2}$$

e as soluções de (7) são dadas por

$$G_n(z) = A\, w_1^n + B\, w_2^n, \quad n \geq 1.$$

Dessa forma, se $\{R_n(z)\}$ for uma sequência de polinômios satisfazendo a relação de recorrência (7), com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = \frac{1}{2}(z+1)$, segue que

$$R_n(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{(z+1) + \sqrt{(z-1)^2 + 4|\alpha|^2 z}}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{(z+1) - \sqrt{(z-1)^2 + 4|\alpha|^2 z}}{2}\right)^n, \quad n \geq 0. \tag{8}$$

Por outro lado, considerando $\{Q_n(z)\}$ uma sequência de polinômios satisfazendo (7), com $Q_0(z) = 0$ e $Q_1(z) = \frac{1}{2}$, temos

$$Q_n(z) = A\, \left(\frac{(z+1) + \sqrt{(z-1)^2 + 4|\alpha|^2 z}}{2}\right)^n + B\, \left(\frac{(z+1) - \sqrt{(z-1)^2 + 4|\alpha|^2 z}}{2}\right)^n, \quad n \geq 0, \tag{9}$$

em que $A = \dfrac{1}{2\sqrt{(z-1)^2 + 4|z|^2 z}}$ e $B = -\dfrac{1}{2\sqrt{(z-1)^2 + 4|z|^2 z}}$.

Seja $\mu_\alpha$ uma medida de probabilidade em $\mathcal{C}$ tal que a correspondente sequência de polinômios de Szegő mônicos $\{S_n(z)\}$ satisfaz $\alpha_n = \alpha$, para todo $n \geq 1$. Logo,

$$S_n(z) = z\, S_{n-1}(z) - \bar{\alpha} S_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1. \tag{10}$$

Segue que os polinômios recíprocos $S_n^*(z)$ satisfazem

$$S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) - \alpha z S_{n-1}(z), \quad n \geq 1. \tag{11}$$

Substituindo (11) em (10), podemos mostrar que $\{S_n(z)\}$ satisfaz também a relação de recorrência

$$S_{n+1}(z) = (z+1)S_n(z) - (1-|\alpha|^2) z S_{n-1}(z). \tag{12}$$

Observe que $R_0(z) + (z - 1 - 2\,\bar{\alpha})\, Q_0(z) = 1 = S_0(z)$. Analogamente, $R_1(z) + (z - 1 - 2\,\bar{\alpha})\, Q_1(z) = z - \bar{\alpha} = S_1(z)$. Podemos provar recursivamente que $S_n(z)$ pode ser escrito em termos de $R_n(z)$ e $Q_n(z)$ como

$$S_n(z) = R_n(z) + (z - 1 - 2\,\bar{\alpha})\, Q_n(z), \tag{13}$$

para todo $n \geq 0$.

De fato. Vimos acima que a relação (13) é válida para $n = 0$ e $n = 1$. Suponhamos que (13) seja válida para um certo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
R_{n+1}(z) &+ (z-1-2\,\bar{\alpha})\,Q_{n+1}(z) \\
&= (z+1)R_n(z) - (1-|\alpha|^2)zR_{n-1}(z) + (z-1-2\,\bar{\alpha})[(z+1)Q_n(z) - (1-|\alpha|^2)zQ_{n-1}(z)] \\
&= (z+1)[R_n(z) + (z-1-2\,\bar{\alpha})\,Q_n(z)] - (1-|\alpha|^2)z\,[R_{n-1}(z) + (z-1-2\,\bar{\alpha})\,Q_{n-1}(z)] \\
&= (z+1)S_n(z) - (1-|\alpha|^2)z\,S_{n-1}(z) \\
&= S_{n+1}(z).
\end{aligned}
$$

Segue também da equação (13) que $z^n\overline{S_n(1/\bar{z})} = z^n\overline{R_n(1/\bar{z})} + (\frac{1}{z} - 1 - 2\alpha)\,z^n\overline{Q_n(1/\bar{z})}$, ou seja,

$$S_n^*(z) = R_n^*(z) + (1 - z - 2\,\alpha z)\,Q_n^*(z).$$

Como $R_n(z) = R_n^*(z)$ e $Q_n(z) = Q_n^*(z)$, para todo $n \geq 0$, podemos escrever

$$S_n^*(z) = R_n(z) + (1 - z - 2\,\alpha z)\,Q_n(z). \tag{14}$$

Assim, usando as equações (8) e (9), podemos obter uma nova expressão para os coeficientes $\tau_n = S_n(1)/S_n^*(1)$ em função do parâmetro $\alpha$.

Fazendo $z = 1$ em (8), obtemos

$$R_n(1) = \frac{1}{2}[(1+|\alpha|)^n + (1-|\alpha|^n)].$$

Da mesma forma, fazendo $z = 1$ em (9), obtemos

$$Q_n(1) = \frac{1}{4|\alpha|}[(1+|\alpha|)^n - (1-|\alpha|^n)].$$

Assim, pela equação (13), temos

$$S_n(1) = \frac{1}{2|\alpha|}\left[(|\alpha| - \bar{\alpha})\,(1+|\alpha|)^n + (|\alpha| + \bar{\alpha})\,(1-|\alpha|)^n\right]. \tag{15}$$

Analogamente, pela equação (14), temos

$$S_n^*(1) = \frac{1}{2|\alpha|}\left[(|\alpha| - \alpha)\,(1+|\alpha|)^n + (|\alpha| + \alpha)\,(1-|\alpha|)^n\right]. \tag{16}$$

Segue, então, que

$$\tau_n = \frac{S_n(1)}{S_n^*(1)} = \frac{(|\alpha| - \bar{\alpha})\,(1+|\alpha|)^n + (|\alpha| + \bar{\alpha})\,(1-|\alpha|)^n}{(|\alpha| - \alpha)\,(1+|\alpha|)^n + (|\alpha| + \alpha)\,(1-|\alpha|)^n}. \tag{17}$$

## 3 Os polinômios para-ortogonais associados ao parâmetro $\alpha$

Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 < |\alpha| < 1$, e $\{S_n(z)\}$ a sequência de polinômios de Szegő com coeficientes de Verblunsky constantes e iguais a $\alpha$, como consideramos na seção anterior. Seja $\{P_n(z)\}$ a sequência de polinômios para-ortogonais mônicos associados a $\{S_n(z)\}$ definidos por

$$P_n(z) = \frac{1}{z-1}\,\frac{S_{n+1}(z) - \tau_{n+1}S_{n+1}^*(z)}{1 + \tau_{n+1}\alpha},\ \ n \geq 0.$$

O próximo teorema mostra que, como consequência dos resultados da seção anterior e do Teorema 1.2, os polinômios $P_n(z)$ podem ser gerados através de uma recorrência cujos coeficientes dependem apenas do parâmetro $\alpha$.

**Teorema 3.1.** *A sequência de polinômios mônicos $\{P_n(z)\}$ satisfaz a relação de recorrência de três termos*

$$P_{n+1}(z) = [z + b_{n+1}]\, P_n(z) - a_{n+1} z P_{n-1}(z), \;\; n \geq 1,$$

*com $P_0(z) = 1$ e $P_1(z) = z + b_1$, em que*

$$b_n = \frac{(|\alpha| - \mathcal{R}e(\alpha))(1+|\alpha|)^{2n-1} + (|\alpha| + \mathcal{R}e(\alpha))(1-|\alpha|)^{2n-1} + 2|\alpha|\mathcal{I}m(\alpha)(1-|\alpha|)^{n-1}}{(|\alpha| - \mathcal{R}e(\alpha))(1+|\alpha|)^{2n-1} + (|\alpha| + \mathcal{R}e(\alpha))(1-|\alpha|)^{2n-1} - 2|\alpha|\mathcal{I}m(\alpha)(1-|\alpha|)^{n-1}}$$

*e*

$$a_{n+1} = (1-|\alpha|^2)\frac{(|\alpha| + \mathcal{R}e(\alpha))(1-|\alpha|)^{2n} + (|\alpha| - \mathcal{R}e(\alpha))(1+|\alpha|)^{2n} + 4|\alpha|^2\mathcal{I}m(\alpha)(1-|\alpha|^2)^{n-1}}{(1+|\alpha|)^{2n}(|\alpha| - \mathcal{R}e(\alpha)) + (1-|\alpha|)^{2n}(|\alpha| + \mathcal{R}e(\alpha))},$$

*para todo $n \geq 1$.*

Dessa forma, a classe de polinômios para-ortogonais mônicos $P_n(z)$ fica completamente caracterizada pelo parâmetro $\alpha$.

Segue como consequência o seguinte resultado para $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Corolário 3.1.** *Se $\alpha \in \mathbb{R}$, a sequência de polinômios mônicos $\{P_n(z)\}$ satisfaz a relação de recorrência de três termos*

$$P_{n+1}(z) = (z+1)\, P_n(z) - (1-\alpha^2) z P_{n-1}(z), \;\; n \geq 1,$$

*com $P_0(z) = 1$ e $P_1(z) = z + 1$.*

Observamos que, neste caso, os polinômios $F_n(z)$ definidos em (5) satisfazem a relação dada em (6), com $c_n = 0$ e $d_{n+1} = \frac{1}{4}(1-\alpha^2)$, $n \geq 1$.

# Referências


[1] T. S. Chihara, “An introduction to Orthogonal Polynomials”, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, 1978.

[2] M.S. Costa; H.M. Felix; A. Sri Ranga, Orthogonal Polynomials on the unit circle and chain sequences, *Journal of Approximation Theory*, 173 (2013) 14-32.

[3] L. Golinskii; P. Nevai; F. Pintér; W. Van Assche, Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle, *Journal of Approximation Theory*, 96 (1999) 1-33.

[4] W.B. Jones; O. Njåstad; W.J. Thron, Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 21 (1989) 113-152.

[5] B. Simon, “Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part 1: Classical Theory”, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., vol. 54, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. Part 1.

[6] A. Sri Ranga, Szegő polynomials from hypergeometric functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138 (2010) 4259-4270.

[7] S. Tsujimoto; A. Zhedanov, Elliptic hypergeometric Laurent biorthogonal polynomials with a dense point spectrum on the unit circle, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 5 (2009) 30.


DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0036  