

# Um estudo de estabilidade por Fourier para a equação de difusão fracionária com correção dimensional

Jhoab P. de Negreiros<sup>1</sup>

Programa de Pós-Graduação em Ciências Computacionais, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Cristiane O. Faria<sup>2</sup>

Instituto de Matemática e Estatística, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

Carlos A. de Moura<sup>3</sup>

Professor Visitante Titular do PPG-EM e PPG-CComp, UERJ, Rio de Janeiro, RJ

**Resumo.** Neste artigo, apresentamos um estudo da análise de estabilidade para a generalização da equação da difusão fracionária com coeficiente constante quando inserido o parâmetro de correção dimensional  $\tau$  no modelo. A abordagem numérica escolhida é um esquema implícito de diferenças finitas, inspirado no método clássico de Euler regressivo. A derivada de ordem fracionária temporal adotada na equação é a de Riemann-Liouville e é aproximada pelo operador de Grünwald-Letnikov. A análise de estabilidade se conduz com a aplicação do método de Fourier nos permitindo mostrar ser incondicionalmente estável o método implícito proposto. Um experimento numérico também é apresentado com resultados exibidos a fim de comprovar as conclusões teóricas e a influência do termo de correção dimensional.

**Palavras-chave.** Equação da difusão fracionária, Aproximações por diferenças finitas, Derivada de Riemann-Liouville, Correção dimensional, Análise de estabilidade.

## 1 Introdução

As equações de difusão fracionária nos últimos anos atraíram considerável interesse por suas aplicações em diversas áreas da ciência. Uma fração dessas aplicações se deve aos sistemas que apresentam um comportamento anômalo superdifusivo ou subdifusivo, tais como difusão em plasmas [2], transporte de fluidos em meios porosos [12], difusão em fractais [13], entre outras.

Nas últimas décadas, distintas formulações para derivadas de ordem fracionária foram propostas [3]. Com isso, Ortigueira e Machado em 2015 propuseram um critério, composto por cinco propriedades que um operador deve satisfazer para que possa ser chamado de derivada fracionária, cf. [11]. Teodoro [8], em sua tese de doutorado, verificou se os operadores mais bem estabelecidos na literatura podem ser classificados como um derivada fracionária segundo o critério de Ortigueira e Machado.

Com todas essas propostas de derivadas fracionárias, existe uma grande necessidade de se propor métodos numéricos para elas. Adaptações dos métodos consagrados para derivadas de ordem inteira são propostas para as derivadas fracionárias mais disseminadas e utilizadas em aplicações como as que já citamos anteriormente [6], [5].

A escolha apropriada da derivada fracionária passa por uma análise detalhada dos operadores e sua adequação às características dos fenômenos estudados. Contudo, quando decidida a formulação não basta aplicar a derivada fracionária ou substituir uma de ordem inteira pela não inteira. A

---

<sup>1</sup>jhoab.negreiros@pos.ime.uerj.br

<sup>2</sup>cofaria@ime.uerj.br

<sup>3</sup>demoura@ime.uerj.br

abordagem fracionária implica considerar os ajustes necessários para manter a correta dimensão das equações [7]. Desta forma, uma série de ajustes devem ser observados.

Neste artigo vamos nos ater à Equação da Difusão Fracionária (EDF) com derivada de ordem não inteira segundo Riemann-Liouville que é definida da seguinte forma

$${}_{RL}D_{a,t}^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f(s) ds, \quad (1)$$

sendo  $\alpha > 0$  a ordem da derivada fracionária e  $m$  seu teto inteiro que satisfaz  $m-1 < \alpha \leq m$ .

O problema de valores iniciais e de contorno da EDF consiste em determinar a distribuição de temperatura, a função  $u(x, t)$ , tal que

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = {}_{RL}D_{0,t}^\alpha \left( \mathcal{K} \tau^\alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) + f(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T, \quad (2a)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2b)$$

$$u(0, t) = l(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2c)$$

$$u(L, t) = r(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2d)$$

onde  $0 < \alpha < 1$  é a ordem da derivada fracionária;  $\phi(x)$ ,  $l(t)$ ,  $r(t)$  e  $f(x, t)$  são funções suficientemente regulares dadas.

A constante  $\mathcal{K}$  em (2a) é conhecida como difusividade térmica, e esse parâmetro depende da condutividade térmica  $\kappa$ , da densidade  $\rho$  e do calor específico do material  $C_p$ , isto é,  $\mathcal{K} = \kappa/\rho C_p$ . No sistema internacional (SI) tem unidade igual a  $[K] = [m^2/s]$ .

A adequação da equação da difusão de ordem inteira para a de ordem arbitrária gera um desbalanceamento das dimensões e unidades. Assim, com base em [7] se aplica um novo parâmetro  $\tau$  em conjunto com a derivada fracionária como visto em (2a), sendo  $\tau$  um parâmetro cuja unidade é tempo, de modo que a equação fracionária (2a) preserve a consistência da dimensão. Dessa forma, denominamos  $\mathcal{K} \tau^\alpha$  como o coeficiente da difusão fracionária.

## 2 Um método tipo Euler regressivo para EDF

Efetuamos uma abordagem numérica de (2) via método das diferenças finitas, sendo aplicado o esquema baseado no de Euler regressivo. A malha computacional é definida por

$$x_i := i\Delta x, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M, \quad L = M\Delta x;$$

e

$$t_n := n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad T = N\Delta t.$$

A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov para uma função suficientemente regular  $u(t)$  é equivalente à sua derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville [1]. A partir da definição da derivada fracionária de Grünwald-Letnikov chegamos a

$${}_{RL}D_{0,t}^{\alpha u(t)} \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(t_{n-k}). \quad (3)$$

A expressão (3) é uma aproximação linear (de ordem 1) para qualquer  $\alpha > 0$  e esta é aplicada em (2a) na derivada fracionária. As aproximações, diferença recuada (de ordem 1) e diferença centrada

(de ordem 2), são aplicadas às derivadas de ordem inteira temporal e espacial, respectivamente. Dessa forma, para  $i = 1, 2, \dots, M - 1$ ;  $n = 1, 2, \dots, N$  o problema (2) é escrito na forma

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{\mathcal{K}\tau^\alpha}{\Delta t^\alpha} \sum_{k=0}^n \omega(k) \left( \frac{u_{i-1}^{n-k} - 2u_i^{n-k} + u_{i+1}^{n-k}}{\Delta x^2} \right) + f_i^n, \tag{4a}$$

$$u_i^0 = \phi(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, M), \tag{4b}$$

$$u_0^n = l(t_n) \quad (n = 0, 1, \dots, N), \tag{4c}$$

$$u_M^n = r(t_n) \quad (n = 0, 1, \dots, N), \tag{4d}$$

onde  $u_i^n$  é a aproximação de  $u(x_i, t_n)$  pelo esquema (4a),  $\omega(k) = (-1)^k \binom{\alpha}{k}$  e  $f_i^n = f(x_i, t_n)$ . Mais detalhes sobre sua forma matricial e implementação computacional podem ser encontrados em [10].

### 3 Estabilidade do método tipo Euler regressivo

Neste trabalho, apresentaremos uma proposta de análise de estabilidade do método tipo Euler regressivo usando o método de Fourier. Primeiramente, escrevemos (4a) como

$$u_i^n = u_i^{n-1} + r \sum_{k=0}^n \omega(k) (u_{i-1}^{n-k} - 2u_i^{n-k} + u_{i+1}^{n-k}) + \Delta t f_i^n, \tag{5}$$

onde  $r := \frac{\mathcal{K}\tau^\alpha \Delta t^{1-\alpha}}{\Delta x^2}$ .

Seja  $U_i^n$  a solução aproximada do problema (4), definimos o erro de aproximação

$$\rho_i^n = u_i^n - U_i^n \quad (i = 1, 2, \dots, M - 1; n = 0, 1, \dots, N)$$

e

$$\boldsymbol{\rho}^n := [\rho_1^n, \rho_2^n, \dots, \rho_{M-1}^n]^t.$$

Obtemos a seguinte equação para o erro de arredondamento

$$\rho_i^n = \rho_i^{n-1} + r \sum_{k=0}^n \omega(k) (\rho_{i-1}^{n-k} - 2\rho_i^{n-k} + \rho_{i+1}^{n-k}). \tag{6}$$

Assumindo que a solução da equação (6) tem a forma  $\rho_i^n = d_n e^{j\sigma i \Delta x}$ , com  $j^2 = -1$  e  $\sigma = 2\pi m/L$ , após substituir e reescrever os termos, obtemos

$$d_n = d_{n-1} - 4r \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\sigma \Delta x}{2} \right) \sum_{k=0}^n \omega(k) d_{n-k}. \tag{7}$$

Para podermos provar a estabilidade de (7), a seguir enunciaremos alguns resultados encontrados na literatura e que serão utilizados na demonstração.

**Lema 3.1.** *Os coeficientes  $\omega(k)$  satisfazem as seguintes relações:*

$$\begin{aligned} \omega(0) &= 1, \quad \omega(1) = -\alpha, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \omega(k) &= 0, \quad \omega(k) < 0 \text{ para } (k = 1, 2, \dots) \text{ e } - \sum_{k=1}^n \omega(k) < 1. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Ver [4]. □

Aplicando o Lema 3.1 em (7), temos

$$d_n = \frac{1 + \alpha\tilde{r}}{1 + \tilde{r}}d_{n-1} - \frac{\tilde{r}}{1 + \tilde{r}} \sum_{k=2}^n \omega(k)d_{n-k} \tag{8}$$

onde  $\tilde{r} := 4r \operatorname{sen}^2\left(\frac{\sigma\Delta x}{2}\right)$ .

**Proposição 3.1.** *Suponha que  $d_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , são as soluções de (8), então temos que  $|d_n| \leq |d_0|$ , para  $n = 1, 2, \dots, N$ .*

*Demonstração.* A prova necessita o emprego da indução matemática. Quando  $n = 1$  em (8), temos

$$d_1 = \frac{1 + \alpha\tilde{r}}{1 + \tilde{r}}d_0.$$

Note que  $0 < \alpha < 1$  e  $\tilde{r} > 0$ , o que nos leva a

$$|d_1| = \frac{1 + \alpha\tilde{r}}{1 + \tilde{r}}|d_0| \leq |d_0|.$$

Supomos que  $|d_l| \leq |d_0|$ ,  $l = 1, 2, \dots, n - 1$  e aplicando o Lema 1, temos

$$\begin{aligned} |d_n| &\leq \frac{1 + \alpha\tilde{r}}{1 + \tilde{r}}|d_{n-1}| + \frac{\tilde{r}}{1 + \tilde{r}} \sum_{k=2}^n |\omega(k)||d_{n-k}| \\ &\leq \left[ \frac{1 + \alpha\tilde{r}}{1 + \tilde{r}} + \frac{\tilde{r}}{1 + \tilde{r}} \sum_{k=2}^n |\omega(k)| \right] |d_0| \\ &= \left[ \frac{1 + \alpha\tilde{r}}{1 + \tilde{r}} + \frac{\tilde{r}}{1 + \tilde{r}} \left( - \sum_{k=1}^n \omega(k) - \alpha \right) \right] |d_0| \\ &= |d_0|. \end{aligned}$$

□

Definimos a função  $\rho^n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) na malha computacional

$$\rho^n(x) = \begin{cases} \rho_i^n, & \text{se } x_i - \frac{\Delta x}{2} < x \leq x_i + \frac{\Delta x}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, M - 1 \\ 0, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\Delta x}{2} \text{ ou } L - \frac{\Delta x}{2} < x \leq L, \end{cases}$$

que pode ser expandida em série de Fourier da seguinte forma

$$\rho^n(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_n(m) e^{j2\pi mx/L} \quad (n = 1, 2, \dots, N),$$

onde

$$d_n(m) = \frac{1}{L} \int_0^L \rho^n(x) e^{j2\pi mx/L} dx.$$

Introduzindo a norma

$$\|\rho^n\|_2 = \left( \Delta x \sum_{i=1}^{M-1} |\rho_i^n|^2 \right)^{1/2} = \left( \int_0^L |\rho^n(x)|^2 dx \right)^{1/2} \tag{9}$$

e aplicando a identidade de Parseval

$$\int_0^L |\rho^n(x)|^2 dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |d_n(m)|^2,$$

obtemos

$$\|\rho^n\|_2^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |d_n(m)|^2. \tag{10}$$

**Teorema 3.1.** *O método implícito tipo Euler regressivo (4) é incondicionalmente estável.*

*Demonstração.* Aplicando a Proposição 1 e usando (10), temos

$$\|\rho^n\|_2 \leq \|\rho^0\|_2, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

o que prova ser o método tipo Euler regressivo (4) incondicionalmente estável. □

## 4 Experimentos numéricos

Nesta seção é apresentado um experimento numérico que dá suporte aos nossos resultados teóricos. A função  $u(x, t) = t^{1+\alpha} \exp(\pi(\alpha - x))$  é a solução encontrada para o problema (2), relativa ao domínio  $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 2]$ , estando os dados usados descritos a seguir:

- $f(x, t) = ((1 + \alpha)t^\alpha - \pi^2\Gamma(\alpha + 2)t) \exp(\pi(\alpha - x))$ ;
- $\phi(x) = 0$ ;  $l(t) = t^{1+\alpha} \exp(\pi\alpha)$ ;  $r(t) = t^{1+\alpha} \exp(\pi(\alpha - 1))$ .

Os valores mostrados na Tabela 1 comprovam os resultados esperados pela análise numérica, com base na verificação da ordem calculada pela norma  $L^2$ , visto que estes se equiparam aos do método de Euler regressivo clássico [9], quando aplicados à equação de difusão de ordem inteira.

Tabela 1: Erro na norma  $L^2$  do método tipo Euler regressivo,  $\Delta x = 1/400$ .

$N$	$\alpha = 0, 2$	ordem	$\alpha = 0, 5$	ordem	$\alpha = 0, 8$	ordem
25	$4, 2893 \times 10^{-3}$		$4, 0035 \times 10^{-2}$		$2, 4034 \times 10^{-1}$	
50	$2, 1443 \times 10^{-3}$	1,0002	$2, 0031 \times 10^{-2}$	0,9990	$1, 2025 \times 10^{-1}$	0,9990
100	$1, 0687 \times 10^{-3}$	1,0024	$1, 0009 \times 10^{-2}$	1,0000	$6, 0119 \times 10^{-2}$	0,9996
200	$5, 3102 \times 10^{-4}$	1,0046	$4, 9950 \times 10^{-3}$	1,0009	$3, 0040 \times 10^{-2}$	1,0000
400	$2, 6254 \times 10^{-4}$	1,0075	$2, 4888 \times 10^{-3}$	1,0019	$1, 4997 \times 10^{-2}$	1,0006

As curvas da solução numérica apresentadas na Figura 1(a), com  $t = 2$  fixo, mostram o efeito da derivada fracionária para diferentes valores de  $\alpha$  mantendo fixo o parâmetro de correção  $\tau$ . Esses resultados confirmam que a derivada de Riemann-Liouville cumpre as propriedades 2 e 3 do critério de Ortigueira e Machado [11]. Na Figura 1(b) é feito essencialmente o contrário, para  $t = 2$ , a ordem  $\alpha$  é tornada fixa e é variado o parâmetro  $\tau$ .

As Figuras 2(a) e 2(b) exibem os gráficos de superfície do exemplo onde os valores para  $\alpha$  foram escolhidos como 0, 1 e 0, 9 e  $\tau = 1$ .

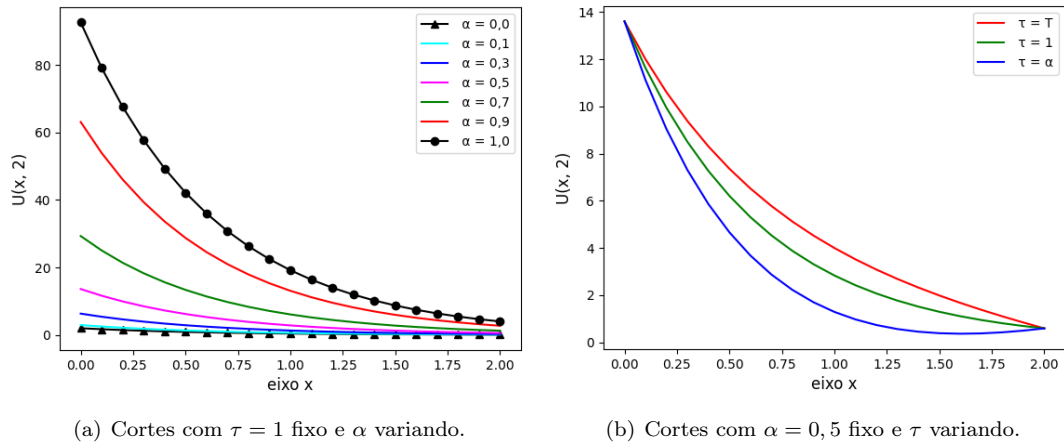


Figura 1: Cortes da solução numérica obtida pelo método explícito para  $t = 2$ , considerando  $\Delta x = 1/20$  e  $\Delta t = 2/200$ . Fonte: Elaborada pelos autores.

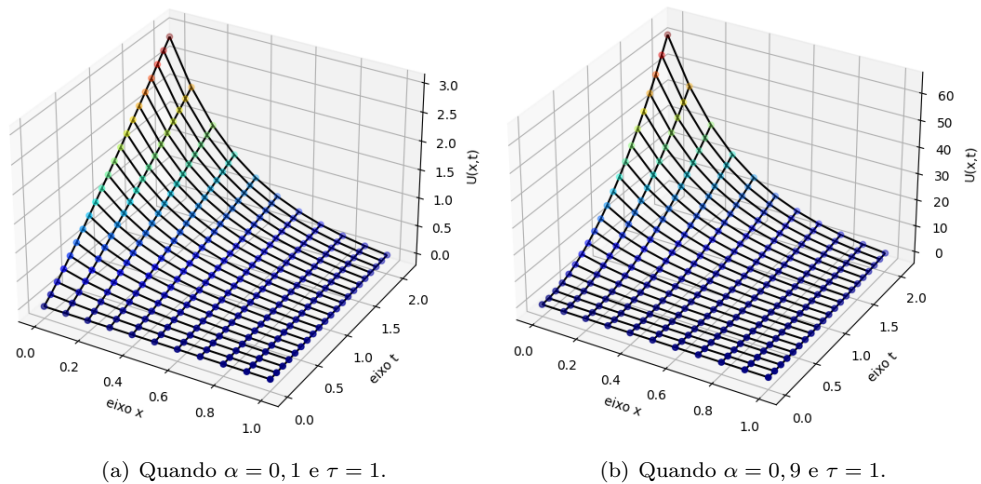


Figura 2: Solução numérica obtida pelo método explícito quando  $\Delta x = 1/10$  e  $\Delta t = 2/20$ . Fonte: Elaborada pelos autores.

## 5 Considerações Finais

Neste artigo apresentamos um esquema de aproximação de diferenças implícitas, denominado método tipo Euler regressivo, aplicado a uma equação de difusão fracionária temporal onde foi considerado um parâmetro  $\tau$  de correção dimensional. O método de Fourier foi usado com êxito para analisar a estabilidade do esquema numérico.

Os testes computacionais realizados confirmaram os resultados teóricos em relação à estabilidade do método numérico. As ordens exibidas na Tabela 1 são compatíveis com os resultados da formulação clássica da equação da difusão de derivadas de ordem inteira, e que nos inspirou a sugerir o esquema aqui descrito.

Além disso, nossos resultados numéricos sugerem que a ordem da derivada fracionária  $\alpha$  aponta para uma forte influência na modelagem, como já esperado, e confirmado pelas Figuras 1 e 2. No

entanto, a inserção do parâmetro de correção de dimensão  $\tau$  na modelagem gera novas possibilidades, mas também nos impõe lidar com um novo desafio, qual seja, um problema de otimização a ser ainda formulado (e resolvido): como escolher o melhor valor para  $\tau$ ? Este certamente representa uma importante direção na pesquisa, pois um suporte teórico também deverá ser considerado, conforme feito no estudo da estabilidade.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

## Referências

- [1] D. Baleanu et al. **Fractional Calculus. Models and Numerical Methods**. 2<sup>a</sup> ed. Singapore: World Scientific, 2012, p. 476.
- [2] J. G. Berryman. “Evolution of a stable profile for a class of nonlinear diffusion equations with fixed boundaries”. Em: **Journal of Mathematical Physics** 18.11 (1977), pp. 2108–2115.
- [3] R. F. Camargo e E. C. Oliveira. **Cálculo Fracionário**. 1<sup>a</sup> ed. São Paulo: Livraria da Física, 2015, p. 183.
- [4] C. M. Chen, F. Liu e V. Anh. “A Fourier method and an extrapolation technique for Stokes’ first problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 223.2 (2009), pp. 777–789.
- [5] C. O. Faria, C. A. de Moura e J. P. de Negreiros. “Algoritmos numéricos para a equação de difusão linear de ordem fracionária”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics** 8.1 (2021).
- [6] R. Garrappa. “On some explicit Adams multistep methods for fractional differential equations”. Em: **Journal of Computational and Applied Mathematics** 229.2 (2009), pp. 392–399.
- [7] J. F. Gómez-Aguilar et al. “Fractional mechanical oscillators”. Em: **Revista Mexicana de Física** 58.4 (2012), pp. 348–352.
- [8] S. T. Graziane. “Derivadas fracionárias: tipos e critérios de validade”. Doutorado em Matemática Aplicada. São Paulo: Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 2019, p. 182.
- [9] R. J. LeVeque. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations. Steady-state and time-dependent problems**. Philadelphia: SIAM, 2007, p. 341. ISBN: 9780898716290.
- [10] J. P. de Negreiros, C. A. de Moura e C. O. Faria. “Numerical algorithms considering a dimensional correction parameter on the fractional order diffusion equation”. Em: **II Brazilian Symposium on Fractional Calculus** (2022).
- [11] M. D. Ortigueira e J. T. Machado. “What is a fractional derivative?” Em: **Journal of Computational Physics** 293 (2015), pp. 4–13.
- [12] H. Spohn. “Surface dynamics below the roughening transition”. Em: **Journal de Physique I** 3.1 (1993), pp. 69–81.
- [13] J. Stephenson. “Some non-linear diffusion equations and fractal diffusion”. Em: **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications** 222.1-4 (1995), pp. 234–247.