

Um Modelo de Dispersão de Poluentes no Lago da Perucaba, Arapiraca -AL

Rinaldo V. da S. Júnior¹; Thiago F. Oliveira²

UFAL, CECA, Rio Largo, AL

Airton M. Cordeiro³; Gabriel da S. Batista⁴; Anamilla B. de Sousa⁵

UFAL, Arapiraca, AL

João F. da C. A. Meyer⁶

DMA - IMECC - UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. Neste trabalho, discutiremos de modo contextualizado a dispersão de poluentes no lago da Perucaba, localizado no município de Arapiraca - AL, por meio da descrição do fenômeno a partir do modelo evolutivo de difusão-advectação, em uma abordagem numérica e computacional. Para tanto, utilizamos os métodos de diferenças finitas e de Crank - Nicolson para discretizar o espaço e tempo, respectivamente. Alguns cenários são simulados via linguagem Python, com a utilização de dados concretos, como localidade das fontes, velocidade do vento e difusibilidade. Ainda, realizamos análises de estabilidade e convergência para fortalecer os dados expostos. Os resultados das simulações indicam um acúmulo em uma região mais delimitada e sugerem, portanto, que o impacto ambiental provocado pela inserção de poluentes a partir das fontes consideradas podem ser revertidos por meio de uma intervenção mais localizada, ou seja, mais restrita.

Palavras-chave. Ecologia Matemática, Impacto Ambiental, Dispersão de Poluentes, Métodos Numéricos, Diferenças Finitas, Método de Crank - Nicolson.

1 Introdução

Com o advento da Revolução Industrial (segunda metade do século XVIII), a manufatura e a tecnologia avançaram, o que resultou na expansão de fábricas e indústrias, havendo paralelamente a isso um intenso processo de urbanização. Proporcional a esse avanço, grandes impactos ambientais (provenientes do consumo de recursos naturais) surgiram - dentre eles, a poluição em corpos aquáticos. Tal poluição é um problema ambiental que tem graves reflexos sociais, tendo em vista que a água é um recurso vital para a subsistência humana. A partir do despejo de elementos não biodegradáveis (que não se decompõem pela natureza) em ambiente aquoso, esses mesmos elementos passam a ser acumulados em lagos, rios e oceanos, reduzindo, assim, a capacidade de retenção de oxigênio das águas.

Um grande exemplo, em Arapiraca, do impacto ambiental supracitado é o lago da Perucaba. Criado pelo Departamento Nacional de Obras Contra as Secas (DNOCS) com o objetivo de abastecimento, o lago é capaz de armazenar $4.130.500 m^3$ de água. Além disso, apesar de não serem

¹rinaldo.junior@arapiraca.ufal.br

²thiago.oliveira@ceca.ufal.br

³airton.cordeiro@arapiraca.ufal.br

⁴gabriel.batista@arapiraca.ufal.br

⁵anamilla.sousa@arapiraca.ufal.br

⁶jmeyer@unicamp.br

apropriadas para consumo - tendo em vista o alto teor de sal -, suas águas continuam a ser utilizadas por banhistas, pescadores e esportistas náuticos.

Dessa forma, com o objetivo de garantir maior segurança às práticas balneárias, é necessário que haja o monitoramento periódico pelos órgãos fiscalizadores responsáveis, divulgando as condições atuais de balneabilidade. Cabe ressaltar que a área de estudo em questão é uma Área de Preservação Permanente (APP), em que vários cuidados em relação a ela estão sendo descumpridos, como emissão de resíduos líquidos, sólidos e na urbanização do entorno do lago da Perucaba [1]. Particularmente, podemos citar o despejo de esgoto doméstico e práticas de criação de animais (cultivo de camarões e peixes) que contribuem ao aumento de carga orgânica no interior do lago [2].

Diante disso, faz-se necessário adotar medidas de emergência e contingência a fim de compreender e combater tais impactos ambientais [4]. Nesse contexto, vamos discutir sobre a dispersão de poluentes no lago da Perucaba, localizado no município de Arapiraca - AL, por meio da descrição do fenômeno a partir do modelo evolutivo de dispersão-advecção, em uma abordagem numérica e computacional.

2 Modelagem do Problema

Como visto em [7, 9], a dispersão de poluentes em meio aquático pode ser modelada matematicamente pela equação de Difusão-Advecção. Nesse contexto, seja $C : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ a concentração de poluentes, ou mais precisamente, a concentração de carga orgânica, em um ponto $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e num instante $t \in (0, T]$, tem-se sua taxa de variação em função da difusão $\text{div}(\alpha \nabla C)$ e da advecção $\text{div}(\mathbb{V} \cdot C)$ - com α sendo a difusibilidade do meio e \mathbb{V} sendo o campo de velocidades - do decaimento da concentração - em vista da perda de poluente por conta de fenômenos como evaporação e perda pela fronteira - e como fonte consideramos a entrada de poluente $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Particularmente, inserindo condições complementares no modelo - inicial e de fronteira - podemos obter soluções numéricas para o problema, em vista da impossibilidade do tratamento analítico/exato. Como condição inicial, consideramos $C(x, y, 0) = C_0(x, y) = 0$, ou seja, a concentração inicial de poluentes no lago é nula, e considerando que há uma perda de poluentes (no caso, passagem de poluentes do interior domínio para o seu exterior) em consequência da progressão em meio a falta de uma barreira física, visto que o domínio retangular está inserido predominantemente no interior do lago - com exceção de uma quantidade mínima de pontos que tangenciam as bordas do lago, como poderemos ver mais adiante - utilizamos a condição de fronteira de Robin [9]. A partir do exposto, temos o seguinte modelo matemático para descrever a dispersão de poluentes:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = \text{div}(\alpha \nabla C) - \text{div}(\mathbb{V} \cdot C) - \sigma C + f \\ \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\partial \Omega} = -KC \\ C(x, y, 0) = C_0(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

onde $\Omega = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ com dimensões aproximadas $0,875 \text{ km} \times 0,375 \text{ km}$, $t \in (0, 200]$ - em horas, K representa o índice de absorção da água para o solo e $C(x, y, t)$ é a concentração de poluente. Adotamos o decaimento e fonte poluidora constantes, nessa ordem, $\sigma = 0,25 \cdot 10^{-8} \text{ h}^{-1}$ e $f = f(x, y)$.

Como citamos, consideramos um retângulo dentro do lago da Perucaba (o maior retângulo possível) como o domínio da dispersão dos poluentes, como podemos ver na Figura 1. Com fins

a obter resultados mais realistas, tomamos dados concretos acerca das fontes poluidoras, particularmente, no que diz respeito à sua localidade [2]. Nesse contexto, adotamos duas fontes, situadas na região P_1 (local de lançamento de esgoto no lago) e P_2 (local de cultivo de camarões e peixes), como responsável pela inserção desses materiais no sistema, pela sua maior proximidade com o retângulo considerado. A fonte P_3 trata-se do descarte do sistema de águas pluviais de condomínios nas proximidades do lago da Perucaba, por conta da sua distância significativa ao domínio desconsideramos os seus efeitos.

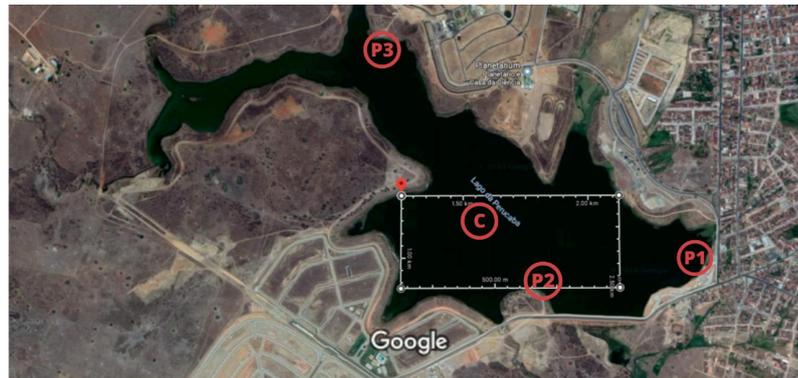


Figura 1: Retângulo considerado como domínio de estudo e Fontes Poluidoras. Fonte: Acervo dos Autores

3 Alguns Parâmetros

3.1 Dados do vento

Por conta do problema estar sendo modelado em um lago, estamos considerando o vento como fator predominante para o efeito da advecção. Posto isso, a partir do exposto em [8], foram obtidas informações como: velocidade, frequência, direção e sentido, é importante salientar que os dados foram coletados de um posto de medição a $3m$ do solo. Das frequências apresentadas, podemos observar que as direções predominantes do vento são leste e sudeste, as quais foram usadas nas simulações com o modelo (1), resultando no vetor de direção do vento. Por meio da observação delas, pode-se conseguir os seguintes resultados:

- Direção/sentido aproximado: Noroeste-Sudeste (com ângulo de $337,5^\circ$);
- Módulo: $V_v = 10,08 \text{ km/h}$.

Realizando uma aproximação linear para o perfil de Ekman, obtemos o valor da velocidade induzida da corrente (V_{ci}) [9]

$$V_{ci} = 0,01 \cdot V_v = 0,01 \cdot 10,08 = 0,1008 \text{ km/h}$$

Considerando a angulação e o valor acima, temos que $\mathbb{V} = (u, v) = (0,0931, -0,0386)$, decomposição vetorial considerando os itens anteriores.

3.2 Coeficiente de difusão

Neste trabalho, estamos utilizando o coeficiente de difusão $\alpha = 1,64 \cdot 10^{-3} \text{ km}^2/\text{h}$, calculado de acordo com o exposto em [7, 9], considerando a área do retângulo e a evolução considerada no

tempo de 200 horas,

$$\alpha = \frac{\text{área}}{\text{tempo}} = \frac{0,875 \times 0,375}{200} \approx 1,64 \cdot 10^{-3} \text{ km}^2/h$$

4 Discretização do tempo e do espaço

4.1 Discretização espacial

Na discretização espacial, utilizamos diferenças centradas, em que $h > 0$ é o passo, o que garante um erro $\mathcal{O}(h^2)$. Desta forma, com $C = C(x, y, t)$ representando a concentração do poluente em Ω , temos que

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C(x+h, y) - C(x-h, y)}{2h} - \frac{h^2}{6} C_{xxx}(\eta, y), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C(x+h, y) - 2C(x, y) + C(x-h, y)}{h^2} - \frac{h^2}{12} C_{xxxx}(\eta, y) \quad (3)$$

e

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{C(x, y+l) - 2C(x, y) + C(x, y-l)}{l^2} - \frac{l^2}{12} C_{yyyy}(\phi, y) \quad (4)$$

com $x-h < \eta < x+h$ e $y-l < \phi < y+l$.

4.2 Sobre a Discretização temporal

A discretização do tempo é realizada através do método de Crank-Nicolson, incondicionalmente estável [3, 5], para todo t . Então, o procedimento será feito da seguinte maneira. O intervalo de tempo $(0, 200]$, será dividido em n_t subintervalos $[t_n, t_{n+1}]$ com $t_{n+1} = t_n + k$, com $k = \frac{T}{n_t}$. Partindo da escolha na escala de tempo feita com $n_t = 750$ obtemos de passo dado por 0,2666. Para aproximar a taxa de variação da concentração com relação ao tempo,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{k} + \mathcal{O}(k^2) \quad (5)$$

5 Estabilidade

Levando em conta a dominância do fator advectivo, para evitar perturbações - oscilações ou efeitos secundários de difusão numérica - que podem levar a instabilidades ou à não convergência [9], consideramos o número de Péclet⁷. Dessa forma, a estabilidade numérica fica condicionada à equação abaixo,

$$P_e = \frac{V_i \cdot dx_i}{\alpha} < 2, \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

onde $V_1 = u, V_2 = v$ e $dx_1 = h, dx_2 = l$. Com isso, podemos controlar o valor do passo e, conseqüentemente, o número de subdivisões em x (n_x) e y (n_y) através da equação (6). A partir daí, apresentamos a seguir uma análise sobre a condição de Péclet em relação aos parâmetros do

⁷Jean Claude Eugène Péclet, físico francês, (Besançon, 10 de fevereiro de 1793 - Paris, 6 de dezembro de 1857) foi um físico francês. O número de Péclet é uma medida de relativa importância, da advecção versus difusão, onde um número grande indica uma distribuição advectivamente dominada, enquanto um número pequeno indica um fluxo difusivo.

modelo, uma vez que fizemos algumas simplificações no domínio consideramos uma malha regular, isto é, $h = l$. Para realizar os cálculos nas malhas abaixo, adotamos o seguinte procedimento: Fixamos o valor para n_x , já com a condição de Péclet para o passo, e obtemos o valor para n_y . Como podemos observar na tabela abaixo, esse procedimento se justifica porque se $v < 0$ então $P_e < 0$ e, portanto, menor que dois, ou seja, para qualquer $l > 0$ a condição de Péclet é satisfeita.

Tabela 1: Número de Péclet - P_e .

Malha	Células ($n_x \times n_y$)	Espaçamento ($h = l$)	$P_e(V_1 = u)$	$P_e(V_2 = v)$
M_1	50×21	0,0175	0,9934	-0,4119
M_2	70×30	0,0125	0,7096	-0,2942
M_3	90×38	0,0097	0,5506	-0,2283
M_4	110×47	0,0080	0,4541	-0,1883
M_5	120×51	0.0073	0,4144	-0,1718

6 Convergência

Com as aproximações das derivadas parciais realizadas pelos métodos de diferenças finitas e Crank-Nicolson, mostramos a forma discretizada da equação de Difusão-Advecção, denotando $c_{i,j}^{(n)} = C(x_i, y_j, t_n)$ o valor aproximado de C no ponto (x_i, y_j, t_n) e por $\mathcal{O}(h^2)$ e $\mathcal{O}(k^2)$ a ordem do erro gerado pela aproximação por Taylor. Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{C_{i,j+1}^{(n+1)} - C_{i,j}^{(n)}}{k} = & \alpha \left[\frac{C_{i-1,j}^{(n+1)} - 2C_{i,j}^{(n+1/2)} + C_{i+1,j}^{(n+1/2)}}{h^2} + \frac{C_{i,j-1}^{(n+1/2)} - 2C_{i,j}^{(n+1/2)} + C_{i,j+1}^{(n+1/2)}}{l^2} \right] \\ & - u \left[\frac{C_{i-1,j}^{(n+1)} - 2C_{i,j}^{(n+1/2)} + C_{i+1,j}^{(n+1/2)}}{h^2} \right] - v \left[\frac{C_{i-1,j}^{(n+1)} - 2C_{i,j}^{(n+1/2)} + C_{i+1,j}^{(n+1/2)}}{l^2} \right] \\ & - \sigma C_{i,j}^{(n+1/2)} + f_i^{(n+1/2)} \end{aligned} \tag{7}$$

o que deve gerar um erro de truncamento na ordem de $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.

7 Resultados e discussões

Nesta seção apresentaremos os cenários gerados a partir do modelo proposto em (1) e algumas simulações comentadas. Aqui, tomamos a malha mais refinada da Tabela 1 (malha M_5) e consideramos o vento de maior frequência, exposto em 3.1. Portanto, para gerar os cenários seguintes, variamos a intensidade das fontes poluidoras, tomando inicialmente ambas como $f(x, y) = 1$ e alterando os seus valores para verificar o efeito de cada uma no fenômeno modelado. Os dados obtidos compõem os três cenários abaixo.

7.1 Cenário 1: Fontes poluentes nos pontos P_1 e P_2 com intensidades máximas

Nesse cenário, exploramos a evolução da dispersão do poluente com as fontes em suas intensidades máximas. Nesse contexto, podemos visualizar, por meio do comparativo com a Figura 1, que os poluentes não atingem a região central do lago e, ainda, que a região atingida é bem definida, isto é, a partir da imagem três da Figura 2 - que corresponde a iteração temporal de número 21 -

não há uma variação significativa da região poluída, como podemos visualizar a partir da imagem quatro da Figura 2, que corresponde a iteração temporal de número 750, ou seja, há um acúmulo local, o que colabora numa possível intervenção pública no tratamento da água do lago.

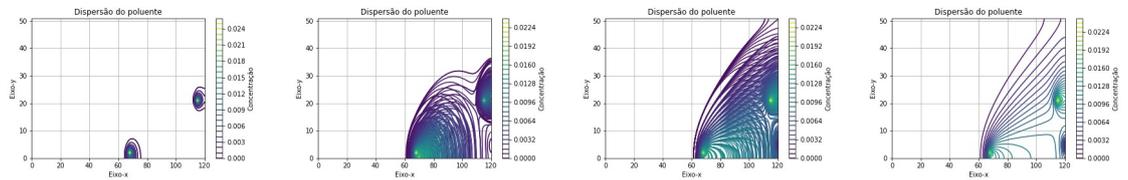


Figura 2: Evolução da concentração C do Cenário 1, para 1, 11, 21 e 750 iterações, respectivamente

7.2 Cenário 2: Fontes poluentes nos pontos P_1 e P_2 e com a intensidade da fonte P_2 controlada

Em contrapartida ao cenário anterior, aqui diminuímos a intensidade da fonte P_2 para um décimo do valor original. Por conta disso, podemos identificar um controle da região poluída, reduzindo consideravelmente a região atingida. De modo análogo, podemos observar que a região central não é alcançada e, também, há uma clara delimitação da região poluída, como observamos na sequência de imagens abaixo.

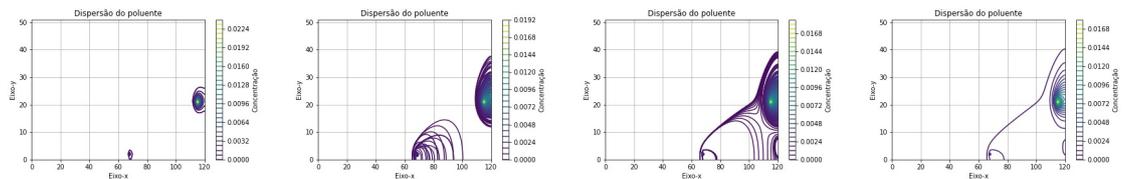


Figura 3: Evolução da concentração C do Cenário 2, para 1, 11, 21 e 750 iterações, respectivamente

7.3 Cenário 3: Fontes poluentes nos pontos P_1 e P_2 e com a intensidade da fonte P_1 controlada

A partir da análise dos resultados obtidos com as simulações desse cenário, podemos identificar que os impactos causados pela fonte P_2 são claramente mais consideráveis se comparados ao gerados pela fonte P_1 , havendo nesse e nos outros cenários um tipo de assimilação desta última pela região opupada pelos poluentes advindos de P_2 , considerando que o cenário obtivo foi muito similar ao Cenário 1.

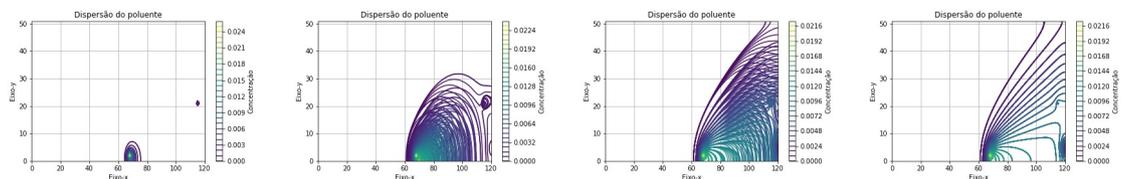


Figura 4: Evolução da concentração C do Cenário 3, para 1, 11, 21 e 750 iterações, respectivamente

8 Considerações Finais

A partir do exposto, podemos concluir que medidas de contigência, com o objetivo de diminuir a carga orgânica da região ou pelo menos distribuí-la de modo mais homogênea (como é o caso da carga orgânica advinda da fonte P_2) e, com isso, aumentar assim a oxigenação da água, favorecendo assim, a própria disseminação e reprodução das espécies no meio aquático, podem ser tomadas pelos órgãos responsáveis. Num primeiro momento o modelo proposto passou por modificações, as quais foram necessárias para fins de conclusão de alguns cenários. Um próximo passo é aplicar o modelo em todo o lago, considerando condição de Robin nas fronteiras [6]. Frisando que o código usado (e que será utilizado para o caso do domínio completo) para calcular a dispersão de poluentes foi adaptado a partir do que foi visto [9]. O qual, passou por um processo de tradução para a linguagem computacional Python, visto que o original estava escrito em MatLab. Essa mudança foi feita tendo em vista que o Python é uma linguagem cada vez mais usada e é de fácil entendimento, pois a mesma se assemelha bastante a língua inglesa.

Agradecimentos

Os autores agradecem à UFAL pelo apoio concedido no programa PIBIC e ao amigo e professor Joni pelo seu engajamento frente à matemática aplicada no Brasil.

Referências

- [1] A. S. de Brito e R. A. Xavier. “Avaliação da qualidade da água do Lago da Perucaba em Arapiraca-AL para a prática da balneabilidade”. Em: **Simpósio Alagoano de Gestão Ambiental**. 2010, pp. 31–42.
- [2] L. T. Brunet. **Avaliação da Demanda Química de Oxigênio no Lago da Perucaba, Arapiraca –AL**. Monografia (Engenharia Civil), UFAL/Delmiro Gouveia, 2019.
- [3] J. A. Cuminato e M. Meneguette. **Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- [4] R. V. da S. Júnior et al. “Dispersão de poluentes no lago Perucaba, Arapiraca-AL”. Em: **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics** 8.1 (2021).
- [5] E. Kreyszig. **Advanced engineering mathematics, 10th edition**. Wiley, 2009.
- [6] J. Kusalaas. **Numerical methods in engineering with python 3**. 2013.
- [7] A. A. S. Lopes et al. “Modelagem do comportamento dispersivo de material impactante em um lago por meio da Equação de Difusão-Advecção”. Em: **Ciência e Natura** 2 (2016), pp. 756–763. DOI: DOI:10.5902/2179-460X19037.
- [8] A. M. L. A. Nunes et al. “Análise do padrão de ventilação natural na cidade de Arapiraca-AL”. Em: **III Congresso Latino Americano de Engenharia do Vento** (2018).
- [9] M. F. B. Prestes. “Dispersão de material impactante em meio aquático: Modelo matemático, aproximação numérica e simulação computacional-Lagoa do Taquaral”. Dissertação de mestrado. Unicamp, 2011.