Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Equações diferenciais fracionárias: fórmula de variação de constantes utilizando famílias (a, k)-regularizadas

João V. M. Aquino[1] Andréa C. Prokopczyk Arita[2]
UNESP, São José do Rio Preto, SP

As equações diferenciais fracionárias têm atraído muito interesse por causa de sua capacidade de modelar fenômenos complexos. Em particular, temos muitos trabalhos na literatura matemática que abordam este tipo de equações, explicitando suas soluções por meio de uma fórmula da variação das constantes. Contudo, em 2010, Hernández et al. [1], indicaram que algumas investigações sobre problemas de existência de soluções para equações diferenciais fracionárias estão incorretas, no sentido de que as fórmulas de variação de constantes não são adequadas.

Desse modo, o objetivo deste trabalho é indicar um procedimento geral, dado em [2], de como obter a fórmula de variação de constantes para uma classe de equações diferenciais fracionárias, com a ajuda da noção de familías resolventes (a, k)-regularizadas , obtendo uma fórmula adequada.

Seguindo o procedimento realizado em [2], considere a seguinte equação diferencial fracionária:

$$\begin{cases} u'(t) - AD_t^{\alpha}u(t) + u(t) = f(t), \ 0 < \alpha < 1 \\ u(0) = x \end{cases}, \tag{1}$$

onde $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow X$ é um operador linear fechado, X é um espaço de Banach, D_t^{α} denota a derivada fracionária de Caputo, com relação a t, de ordem $\alpha > 0$ e f uma função apropriada.

O método para encontrar a fórmula de variação de constantes é baseado no uso de propriedades de transformadas de Laplace e famílias (a, k)-regularizadas, conceito introduzido por Lizama em [3] e estudado em trabalhos posteriores.

Definição 0.1 ([2]). *Sejam X um espaço de Banach, $k \in C(\mathbb{R}_+)$, $k \neq 0$, e seja $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $a \neq 0$. Assuma que A é um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$. Uma família fortemente contínua $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ de operadores lineares limitados de X em X é dita uma família resolvente (a, k)-regularizada em X (ou simplesmente família (a, k)-regularizada), tendo A como um gerador, se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $R(0) = k(0)I$;
2. $R(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *e* $R(t)Ax = AR(t)x$, *para todo* $x \in \mathcal{D}(A)$ *e* $t \geqslant 0$;
3. $R(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)AR(s)x\, ds$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathcal{D}(A)$.

De acordo com [4], a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha > 0$, com relação a t, de uma função f é definida como $D_t^{\alpha}f(t) = J_t^{n-\alpha}f^{(n)}(t)$, onde n é o menor interio maior ou igual a α e J_t^{β} denota a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\beta > 0$ e, então, utilizando propriedades da transformada de Laplace e da derivada fracionária de Caputo, tomando a transformada de Laplace na equação (1), e manipulando os termos obtidos, conseguimos a expressão
$\lambda^{\alpha}\Big(\dfrac{\lambda+1}{\lambda^{\alpha}} - A\Big)\hat{u}(\lambda) - u(0) + \dfrac{1}{\lambda^{1-\alpha}}Au(0) = \hat{f}(\lambda)$.

[1]joao.aquino@unesp.br
[2]andrea.prokopczyk@unesp.br

Isolando $\hat{u}(\lambda)$, desde que $\dfrac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} \in \rho(A)$, e usando uma identidade para eliminar o termo que envolve A, conseguimos obter que $\hat{u}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}u(0) - \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{1}{\lambda^\alpha}\Big(\dfrac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} - A\Big)^{-1}u(0) + \dfrac{1}{\lambda^\alpha}\Big(\dfrac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} - A\Big)^{-1}\hat{f}(\lambda)$. Assim, considerando uma família fortemente contínua $\{R(t)\}_{t\geqslant 0} \subset \mathcal{B}(X)$, que admite transformada de Laplace, e tal que $\hat{R}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^\alpha}\Big(\dfrac{\lambda+1}{\lambda^\alpha} - A\Big)^{-1}$, pela inversa da transformada de Laplace, obtemos que a fórmula de variação de constantes para a equação (1) é dada por $u(t) = u(0) - \int_0^t R(s)u(0)\,ds + \int_0^t R(t-s)f(s)\,ds$. Agora, a fim de garantir que existe uma família nessas condições, utilizando [3], sabemos que $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ é uma família resolvente (a,k)-regularizada com gerador A se, e somente se, para todo $\lambda > w$, $(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}$ existe em $\mathcal{B}(X)$ e

$$H(\lambda)x = \frac{\hat{k}(\lambda)}{\hat{a}(\lambda)}\left(\frac{1}{\hat{a}(\lambda)}I - A\right)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda s}R(s)x\,ds,\ x \in X, \tag{2}$$

onde $w \in \mathbb{R}$ é tal que $\hat{a}(\lambda) \neq 0$, para todo $\lambda > w$. Assim, para saber o tipo de família resolvente (a,k)-regularizada que estamos procurando, comparamos a expressão de $\hat{R}(\lambda)$ com (2), obtendo que $\hat{a}(\lambda) = \dfrac{\lambda^\alpha}{\lambda+1}$ e $\hat{k}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda+1}$, o que ocorre quando $a(t) = t^{-\alpha}E_{1,1-\alpha}(-t)$ e $k(t) = e^{-t}$, onde $E_{1,1-\alpha}(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Neste caso é suficiente exigir que a equação (1) tenha A como o gerador de uma família reolvente (a,k)-regularizada $R(t)$, com a e k como dadas anteriormente.

Observação 0.1. *Observe que de acordo com o par (a,k) escolhido obtemos diferentes tipos de famílias de operadores lineares limitados, por exemplo:*

1. *[5, Section 3.1] se $a \equiv 1$ e $k \equiv 1$, $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ é um C_0-semigrupo, digamos $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$;*
2. *[5, Section 3.4] se $a(t) = t$ e $k \equiv 1$, $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ é uma família cosseno fortemente contínua, digamos $\{C(t)\}_{t\geqslant 0}$.*

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] E. Hernández, D. O'Regan e K. Balachandran. "On recent developments in the theory of abstract differential equations with fractional derivatives". Em: **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications** 73.10 (2010), pp. 3462–3471. DOI: https://doi.org/10.1016/j.na.2010.07.035.

[2] C. Lizama e G. M. N'Guérékata. "Mild solutions for abstract fractional differential equations". Em: **Applicable Analysis** 92.8 (2013), pp. 1731–1754. DOI: 10.1080/00036811.2012.698271.

[3] C. Lizama. "Regularized solutions for abstract Volterra equations". Em: **Journal of Mathematical Analysis and Applications** 243.2 (2000), pp. 278–292. DOI: 10.1006/jmaa.1999.6668.

[4] E. G. Bajlekova. "Fractional Evolution Equations in Banach Spaces". Tese de doutorado. Eindhoven University of Technology, 2001.

[5] W. Arendt et al. **Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems**. 2nd. ed. Basel: Birkhäuser/Springer Basel AG, 2011. ISBN: 3034800878.

