Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Equações de diferenças para coeficientes de Verblunsky

Karina Seviero Rampazzi[1]
Pós-Graduação em Matemática, Unesp, São José do Rio Preto, SP
Cleonice Fátima Bracciali[2] Luana de Lima Silva Ribeiro[3]
Departamento de Matemática, Unesp, São José do Rio Preto, SP

Os polinômios ortogonais no círculo unitário, também conhecidos como polinômios de Szegő, vêm chamando atenção de muitos pesquisadores devido as suas aplicações, tais como em processamento de sinais, regras de quadratura, teoria espectral, entre outras.

Uma sequência de polinômios mônicos $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$, onde Φ_n é de grau exatamente n, é ortogonal sobre o círculo unitário com relação a função peso w em $\theta \in (0, 2\pi)$ e $z = e^{i\theta}$, se satisfaz

$$\int_0^{2\pi} \Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)}w(\theta)d\theta = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ k_n^{-2}, & \text{se } n = m \text{ e } k_n > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Os polinômios Φ_n satisfazem uma propriedade importante conhecida como recorrência de Szegő

$$z\Phi_n(z) = \Phi_{n+1}(z) + \overline{\alpha}_n \Phi_n^*(z), \tag{2}$$

onde $\Phi_n^*(z) = z^n \overline{\Phi}_n(1/z)$ é o polinômio recíproco e os coeficientes α_n, dados por $\alpha_n = -\overline{\Phi_{n+1}(0)}$, com $n = 0, 1, 2, \ldots$, são chamados de coeficientes de Verblunsky. Para mais detalhes sobre os polinômios ortogonais no círculo unitário, ver Simon [1].

Entre os polinômios ortogonais, alguns são classificados como clássicos ou semiclássicos. Uma das caracterizações mais conhecidas desses polinômios é que a função peso w associada ao polinômio ortogonal satisfaz uma equação de Pearson que pode ser dada por $[\sigma(z)w(z)]' = \tau(z)w(z)$, onde σ e τ são polinômios de Laurent. Se σ e τ são polinômios, onde σ tem grau menor ou igual a 2 e τ é um polinômio de grau 1, os polinômios ortogonais cuja função peso satisfaz a equação de Pearson são chamados de polinômios ortogonais clássicos.

A equação de Pearson associada aos polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos permite obter uma relação de estrutura dada por

$$\sigma(z)p_n'(z) = \sum_{k=n-l}^{n+s-1} A_{n,k}p_k(z), \tag{3}$$

onde $s = grau(\sigma)$, $l = \max\{grau(\tau), grau(\sigma) - 1\}$ e os coeficientes $A_{n,k}$ são constantes. Os polinômios ortogonais no círculo unitário com coeficientes de Verblunsky reais apresentam algumas propriedades que foram estudadas em [3]. Algumas das relações encontradas foram a relação de estrutura e uma equação de diferenças (relação de recorrência) não linear satisfeita pelos coeficientes de Verblunsky. Considere a seguinte função peso apresentada em [3]

$$w(t, z) = \frac{1}{2\pi}e^{t(z+z^{-1})/2}, \quad z = e^{i\theta} \text{ e } \theta \in (0, 2\pi), \tag{4}$$

[1]karina.rampazzi@unesp.br
[2]cleonice.bracciali@unesp.br
[3]luana.m22@gmail.com

onde t é um parâmetro real. Os coeficientes de Verblunsky dos polinômios ortogonais com relação a função peso (4) são todos reais. Além disso, a recorrência de Szegő associada a função peso w tem o parâmetro t, além da variável z, ou seja, os coeficientes de Verblunsky dependem de t.

Note que função peso w satisfaz a equação de Pearson da forma

$$w'(t,z) = \frac{t}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) w(t,z), \tag{5}$$

ou seja, $\sigma(z) = 1$, $\tau(z) = t/2(1 - 1/z^2)$, $s = 0$ e $l = 2$, então, como mencionado anteriormente, esses polinômios satisfazem uma relação de estrutura dada por

$$\Phi_n'(z) = n\Phi_{n-1}(z) + B_n \Phi_{n-1}(z), \tag{6}$$

onde B_n é uma constante e os coeficientes de Verblunsky satisfazem a equação de diferenças

$$\alpha_{n+1}(t) + \alpha_{n-1}(t) = -\frac{2(n+1)}{t} \frac{\alpha_n(t)}{1 - \alpha_n^2(t)}. \tag{7}$$

Em [2] foi apresentada uma classe especial de polinômios ortogonais no círculo unitário em que os coeficientes de Verblunsky correspondentes são complexos. Tais polinômios são ortogonais com relação a seguinte função peso

$$w(b,z) = \frac{i\tau^{(b)}}{2^{b+\bar{b}}}(-z)^{-\bar{b}-1}(1-z)^{b+\bar{b}}, \quad z = e^{i\theta}, \;\; \theta \in (0, 2\pi), \tag{8}$$

onde $\tau^{(b)}$ é uma constante, $b = \lambda + i\eta$ e $\lambda > -1/2$. O objetivo deste trabalho é mostrar que os coeficientes de Verblunsky, α_n, associados aos polinômios ortogonais com relação a função peso (8), satisfazem a seguinte equação de diferenças

$$\overline{\alpha_n}(\alpha_{n-1} + \alpha_n) = (\bar{b} + n)(|\alpha_{n-1}|^2 - |\alpha_n|^2). \tag{9}$$

Para isto, a estratégia é utilizar uma relação de estrutura similar a (6) para estes polinômios e, também, a recorrência de Szegő (2).

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, pelo apoio financeiro.

Referências

[1] B. Simon. **Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Part I: Classical Theory**. Providence: American Mathematical Society, 2005.

[2] A. Sri Ranga. "Szegő polynomials from hypergeometric functions". Em: **Proceedings of the American Mathematical Society** 12 (2010), pp. 4259–4270. DOI: `https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2010-10592-0`.

[3] W. Van Assche. **Orthogonal Polynomials and Painlevé Equations**. Belgium: Cambridge University Press, 2017.