Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 9, n. 1, 2022.

Trabalho apresentado no XLI CNMAC, Unicamp - Campinas - SP, 2022.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics
Preprint

Caracterização dos Espaços Compactos

Marina A. Domingues[1]
Matemática - Licenciatura, UNIFAL-MG, Alfenas, MG
José Carlos de Souza Junior[2]
Instituto de Ciências Exatas,UNIFAL-MG, Alfenas, MG

Desde o início da topologia, era claro que o intervalo fechado $[a, b]$ da reta real possuía uma certa propriedade crucial para se provar teoremas como o Teorema do Valor Máximo e o Teorema da Continuidade Uniforme. Por um longo tempo, não estava claro como essa propriedade deveria ser formulada para um espaço topológico arbitrário. Acreditava-se que a propriedade crucial de $[a, b]$ consistia no fato de que todo subconjunto infinito de $[a, b]$ possui um ponto de acumulação e atribuiu-se, então, o nome de *compacidade* a essa propriedade particular. Posteriormente, foi percebido pelos matemáticos que uma formulação mais forte, em termos de coberturas abertas do espaço, é mais central [1]. Neste trabalho, iremos apresentar uma caracterização dos espaços métricos compactos, que foi uma temática abordada em parte de nosso projeto de Iniciação Científica, no qual foi realizado um estudo mais amplo sobre espaços compactos do que o visto no curso de graduação de Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alfenas.

A seguir, estão elencadas algumas definições e resultados relacionados com a caracterização dos espaços compactos que pretendemos apresentar neste trabalho:

Definição 1 : *Uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um espaço topológico X é chamada cobertura de X, se a união dos elementos de $\mathcal{A}$ é igual a X. É chamada de cobertura aberta de X, se os elementos de $\mathcal{A}$ são subconjuntos abertos de X.*

Definição 2 : *Um espaço topológico X é dito compacto se toda cobertura aberta $\mathcal{A}$ de X contém uma subcobertura finita que também cobre X.*

Definição 3 : *Um espaço topológico X é um espaço de Hausdorff, se para cada $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem vizinhanças U e V, de x e y, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$.*

Lema 1: *Seja Y um subespaço de X. Então Y é compacto se, e somente se, toda cobertura de Y composta por conjuntos abertos em X admite uma subcoleção finita cobrindo Y.*

Teorema 1: *Todo subesbaço fechado contido em um espaço compacto é compacto.*

Teorema 2: *Todo subespaço compacto de um espaço de Hausdorff é fechado.*

Teorema 3: *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua e X compacto. Então, $f(X)$ também é compacto.*

As próximas definições estabelecem propriedades importantes dos espaços topológicos, as quais são equivalentes sobre um espaço métrico, conforme aponta o Teorema 4.

Definição 4 : *Dizemos que um espaço topológico X satisfaz a propriedade de Bolzano-Weierstras se todo subconjunto infinito de X possui um ponto de acumulação.*

[1]marina.andrade@sou.unifal-mg.edu.br
[2]jose.souza@unifal-mg.edu.br

Definição 5: *Seja X um espaço topológico. Dizemos que o espaço X é sequencialmente compacto se toda sequência de pontos de X possui uma subsequência convergente.*

Teorema 4: *Seja X um espaço métrico. Então, são equivalentes:*

(i) *X é compacto;*

(ii) *X satisfaz a propriedade de Bolzano-Weierstrass;*

(iii) *X é sequencialmente compacto.*

No próximo exemplo, vemos que é possível obter um conjunto fechado e limitado, mas que não é compacto.

Exemplo: *Considere um conjunto X com a métrica zero-um. X é fechado, pois todo conjunto é fechado em si mesmo. X é limitado, pois tem diâmetro* 1. *Contudo, X será compacto se, e somente se, for finito.*

A iniciação científica, que originou esse trabalho, permitiu um estudo mais aprofundado de conceitos topológicos que não são abordados no curso de graduação da discente, tais como espaços topológicos e continuidade, compacidade por meio de coberturas abertas e sua caracterização nos espaços métricos, discutida no Teorema 4 desse trabalho. Como trabalhos futuros, pretendemos estudar os conceitos de espaços completos, distância de Hausdorf, contrações e uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach que permite obter o Triângulo de Sierpinski como o ponto fixo de um sistema de funções iteradas [2], conforme ilustra a figura abaixo.

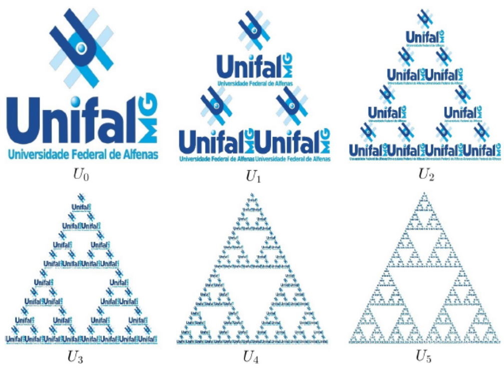

Figura 1: Logo da UNIFAL-MG (U_0) e as cinco primeiras iterações indicando a convergência para o Triângulo de Sierpinski. Fonte: Próprio autor.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) - CNPq.

Referências

[1] J. R. Munkres. Topology. 2a. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000. isbn: 0131816292.M.
[2] Barnsley. Fractals Everywhere. 1. ed. San Diego: Academic Press, 1988. isbn: 0-12-079062-9.